ریاضی عمومی ۲

ریاضی ۲

فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر خطی

تعریف: اگر A ماتریس $n\times n$ باشد و ماتریس $B_{n\times n}$ موجود باشد که $AB=BA=I$ می‌گوئیم A وارون پذیر است و $B=A^{-1}$

قضیه: A وارون پذیر است $\Longleftrightarrow$ $\det(A)=|A|\neq 0$ فرمول محاسبه A^{-1} عبارت است از

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$$

ماتریس همسازه $N=[N_{ij}]_{n\times n}$

$N_{ij}=(-1)^{i+j}$ (دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر i و ستون j از A)

ترانهاده $A^{*}=adj(A)=N^{t}$ ماتریس الحاقی

نحوه محاسبه $\det A$ (روش بسط دترمینان)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

بسط سطر اول

$$|A|=a_{11}\times N_{11}+a_{12}\times N_{12}+\cdots+a_{1n}\times N_{1n}$$

$\frac{11}{96}$ $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&-1\\2&3&0\end{pmatrix}$ عنصر سطر سوم و ستون دوم A^{-1} را بیابید؟

$$(A^{-1})_{3,2}=\frac{A^*_{3,2}}{|A|}=\frac{M_{2,3}}{|A|}=\frac{(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-1\\2&3\end{vmatrix}}{-3}=\frac{-5}{-3}=5/3$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&2&-1\\2&3&0\end{vmatrix}=2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&2\\2&-1\end{vmatrix}+3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}=-6+3=-3$$

روش دیگر $|A|$

$$\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&2&-1\\2&3&0\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&2&-1\\0&5&-4\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{5}{2}r_2}\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&2&-1\\0&0&-3/2\end{vmatrix}=1\times2\times\frac{-3}{2}=-3$$

در ماتریس های بالا مثلثی یا پایین مثلثی دترمینان برابر ضرب اعضای قطر اصلی می باشد

$\frac{27}{34}$ مساحت مثلث به رئوس زیر را بیابید

$A(0,0,0)$

$B(1,0,2)$, $C(2,-2,0)$

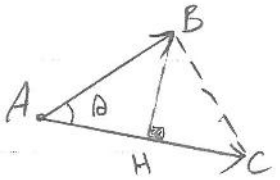
$\vec{AB}=B-A=(1,0,2)$ $\quad\vec{AC}=C-A=(2,-2,0)$

$\vec{i}=(1,0,0)$ $\quad\vec{j}=(0,1,0)$ $\quad\vec{k}=(0,0,1)$

ضرب خارجی

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&0&2\\2&-2&0\end{vmatrix}=(4)i-(-4)j+(-2)k=4i+4j-2k$$

$=(4,4,-2)$



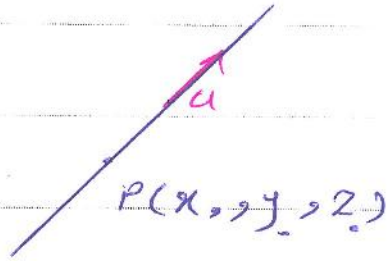
اندازه بردار $|AB\times AC|=\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{36}=6$

مساحت مثلث $=\frac{1}{2}|BH||AC|=\frac{1}{2}\underbrace{|AB||AC|\sin\theta}_{|AB\times AC|}=\frac{1}{2}|AB\times AC|=\frac{6}{2}=3$

نکته: مهمترین ویژگی ضرب خارجی دو بردار این است که هر دو بردار تشکیل دهنده عمود بر آن می باشند

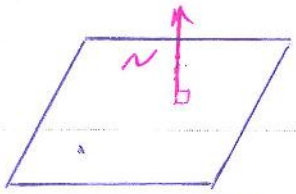
معادله خط و صفحه

بردار هادی $\vec{u} = (a, b, c)$



معادله خط $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c} = t$

معادله پارامتری
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

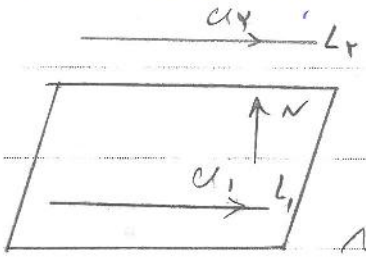


نرمال (قائم) $\vec{N} = (a, b, c)$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

معادله صفحه

۳۸/۴۳ معادله صفحه‌ای که از $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-4}{-2}$ بگذرد و موازی خط $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+2}{1}$ باشد را بیابید.



$\vec{u_1} = (3, 3, -2)$ و $\vec{u_2} = (2, -4, 1)$

$N \perp u_1$ و $N \perp u_2$

نرمال صفحه $\vec{N} = u_1 \times u_2 = (-6, -7, -16)$

$P(1, 4, 4)$ روی L_1 روی صفحه است ←

معادله صفحه $-6(x-1) - 7(y-4) - 16(z-4) = 0$

۴۳/۲ج۶۷ فصل مشترک دو صفحه $x - y - 5z = 2$ و $x + y - z = 5$ با خط $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{x+1}{3}$ چه وضعی دارد؟

$$\begin{cases} n = (1, 1, -1) \\ n' = (1, -1, -5) \end{cases} \longrightarrow \vec{u_1} = n \times n' = (-6, 4, -2)$$

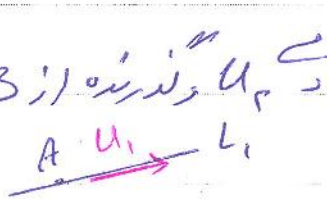
$\vec{u_2} = (3, -2, 1) = -\frac{1}{2}\vec{u_1}$

$\rightarrow u_1 \parallel u_2 \rightarrow$ موازی اند ، منطبق اند ✓

برای بررسی این مطلب نقطه ای دلخواه $P \in L_2$ انتخاب کرده و در L_1 امتحان می کنیم

$P(-1, 3, -4) \xrightarrow{\text{در } L_1} \begin{cases} -1+3+4=5 \rightarrow P \notin L_1 \rightarrow \text{موازی اند} \\ -1-3+20=2 \end{cases}$

نکته : خط L_1 با هادی $\vec{u_1}$ و گذرنده A و خط L_2 با هادی u_2 و گذرنده از B مفروض است

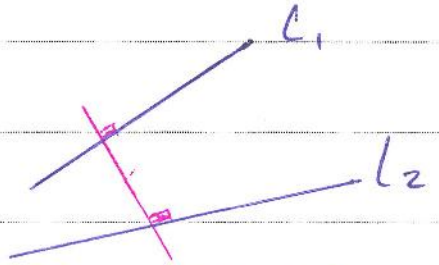


الف : اگر $u_1 \parallel u_2 \leftarrow$ موازی یا منطبق هستند

ب : اگر $u_1 \times u_2 \leftarrow$ و $\vec{AB} \cdot (u_1 \times u_2) = 0 \leftarrow$ متقاطع اند

ج : $\vec{AB} \cdot (u_1 \times u_2) \neq 0 \leftarrow$ متنافرند

نکته : طول عمود مشترک یا فاصله بین دو خط متنافر عبارت است از :



$$\text{فاصله} = \frac{|\vec{AB} \cdot (u_1 \times u_2)|}{|u_1 \times u_2|}$$

هادی عمود مشترک $= \vec{u_1} \times \vec{u_2}$

فاصله دو خط متنافر زیر را بیابید عمران ۹۱ — ۲ ج ۶۷ ق

$L_1 : \frac{x+1}{4} = \frac{-y-2}{-3} = \frac{z}{-5}$

$L_2 : \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{-2}$

$\frac{x+1}{4} = \frac{2-y}{3} = -\frac{z}{5}$

$\frac{x+2}{2} = \frac{3-y}{1} = \frac{-z-3}{2}$

$\vec{u_1} = (4, -3, -5)$ و $A(-1, 2, 0)$

$\vec{u_2} = (2, -1, -2)$ و $B(-2, 3, -3)$

$u_1 \times u_2 = (2, -1, 2)$

$\vec{AB} = (-1, 1, -3)$ و

$\overrightarrow{AB}\cdot(u_1\times u_2) = -1-2-6 = -9$

فاصله $= \dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot(u_1\times u_2)|}{|u_1\times u_2|} = \dfrac{9}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2}} = 3$

نکته : فرض کنید $A(x_1, y_1, z_1)$ داده شده است

الف) فاصله A از صفحه $ax+by+cz+d=0$ عبارت است از $\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ب) فاصله A از خط گذرنده از نقطه B با بردار هادی $\vec{u}$ عبارت است از $\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}$ = فاصله

۳۵/۲۹ فاصله نقطه $(-1, 3, -1)$ از خط زیر $x=2t+1$ و $y=1$ و $z=t$

$t=0$ ؛ $\overrightarrow{AB} = B-A = (2, -2, 1)$ $\vec{u} = (2, 0, 1)$ و $B(1, 1, 0)$ روی خط

$\overrightarrow{AB}\times u = (-2, 0, 4)$ فاصله $= \dfrac{|AB\times u|}{|u|} = \dfrac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = 2$

دستگاه های خطی

۱۰/۲ ج ۹۸ به ازای چه مقدار a دستگاه زیر بی نهایت جواب دارد

$$\begin{cases} x-y+az=0 \\ 3x-y+2z=0 \\ 6x-4y+5z=0 \end{cases} \longleftrightarrow Ax=b$$

ماتریس ضرایب $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ و $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

طرف دوم $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

بی‌نهایت جواب $\Longleftrightarrow |A|=0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-6r_1]{r_2-3r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 2-3a \\ 0 & 2 & 5-6a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 2-3a \\ 0 & 0 & 3-3a \end{vmatrix} = 2(3-3a) = 0 \longrightarrow a=1$$

$A_{n\times n}X = b$:

- $|A| \neq 0 \rightarrow$ دستگاه جواب یکتا دارد
- $|A| = 0 \rightarrow$ دستگاه فاقد جواب است / دستگاه بی‌نهایت جواب دارد

$AX = 0$:

- $|A| \neq 0 \rightarrow$ فقط جواب صفر (بدیهی) دارد
- $|A| = 0 \rightarrow$ دستگاه بی‌نهایت جواب دارد (دستگاه جواب غیربدیهی دارد)

وابسته خطی، مستقل خطی

تعریف: بردارهای $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ را مستقل خطی می‌نامیم هرگاه از رابطه $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k = 0$ نتیجه شود که $c_1 = \dots = c_k = 0$ و در غیر اینصورت آن‌ها را وابسته خطی می‌نامیم

نکته ۱: در فضای $\mathbb{R}^3$:

الف) دو بردار مستقلند $\Longleftrightarrow$ موازی نباشند

ب) سه بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستقلند $\Longleftrightarrow$ در یک صفحه نباشند

$u\cdot(v\times w) \neq 0 \Longleftrightarrow$

نکته ۲: برای بررسی مستقل یا وابسته بودن $\vec{u}_1$ و ... و $\vec{u}_k$ آنها در سطرهای یک ماتریس قرار می دهیم و با عملیات سطری (افزودن مضربی از یک سطر به سطر) اعضای زیر A_{ii} (یعنی قطر اصلی) را صفر می کنیم. حال اگر سطر صفر ایجاد شود، بردارها وابسته اند و در غیر اینصورت مستقل می باشند

$$A = \begin{bmatrix} u_1 \\ | \\ | \\ u_k \end{bmatrix}_{k\times n}$$

نکته ۳: چنانچه $k=n$ آنگاه بردارها مستقل هستند $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

۲۳ / ۲ج.۷۲۸ α چقدر باشد تا بردارهای زیر وابسته خطی شوند

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$\rightarrow |A| = (\alpha-2)^2 = 0 \rightarrow \alpha = 2$$

تعریف: اگر $A_{m\times n}$ به حداکثر تعداد سطرهای مستقل خطی (به شرط آنکه هر سطر را یک بردار در نظر بگیریم)، رتبه ماتریس می گوئیم و با نماد $Rank(A)$ نمایش می دهیم

روش محاسبه رتبه: برای تعیین $Rank(A)$ با عملیات سطری اعضای زیر A_{ii} را صفر می کنیم تعداد سطرهای غیرصفر به وجود آمده برابر $Rank(A)$ می باشد

۴۰ / ۲ج.۵۴۲ رتبه ماتریس زیر را بیابید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+4r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{غیرصفر} \\ \rightarrow \text{غیرصفر} \\ \rightarrow \text{صفر} \end{matrix} \rightarrow Rank(A) = 2$$

بردار و مقدار ویژه

تعریف: فرض کنید A ماتریس $n\times n$ باشد و بردار غیرصفر $\vec{v}$ و عدد λ موجود باشند که $Av=\lambda v$ آنگاه $\vec{v}$ بردار ویژه و λ مقدار ویژه نامیده می‌شود

$$Av=\lambda v \rightarrow Av-\lambda v=0 \rightarrow (A-\lambda I)v=0$$

شرط لازم و کافی برای آنکه دستگاه همگن بالا دارای جواب v غیرصفر باشد آن است که

$$\det(A-\lambda I)=0 \longrightarrow \text{محاسبه مقدار ویژه}$$

و برای محاسبه بردار ویژه متناظر λ دستگاه همگن زیر را حل می‌کنیم

$$(A-\lambda I)v=0 \longrightarrow \text{محاسبه بردار ویژه}$$

نکته: اگر A ماتریس $n\times n$ باشد آنگاه:

۱) $\lambda_1+\dots+\lambda_n=tr(A)$ جمع اعضای روی قطر اصلی

۲) $\lambda_1+\dots+\lambda_n=\det(A)$

$\frac{16}{54}$ بردار ویژه متناظر بزرگترین مقدار ویژه ماتریس زیر

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 4\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & -6 & -3\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 6 & 4\\ 0 & 4-\lambda & 2\\ 0 & -6 & -3-\lambda\end{vmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه A را می‌یابیم

$$\lambda I=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=(-1-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & 2\\ -6 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(\lambda^2-\lambda)=0$$

$$\rightarrow \lambda=-1,0,1 \rightarrow \lambda_{max}=1$$

محاسبه بردار ویژه $\lambda=1$:

$$v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I)v=\begin{pmatrix}-2&6&4\\0&3&2\\0&-6&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}-2x+6y+4z=0\\3y+2z=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{z=3\ \text{آزاد}} y=-2,\ x=0 \rightarrow v=\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$$ بردار ویژه

$$\rightarrow av=\begin{pmatrix}0\\-2a\\3a\end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$ همه بردار ویژه های متناظر $\lambda=1$

۳ ص / ۲ ص

$A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$ می باشد و $|A|=36$ دو مقدار ویژه دیگر را بیابید. $\lambda_1=2$ مقدار ویژه میدانیم

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=tr(A)=11 & \lambda_2+\lambda_3=9\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=36 & \lambda_2\lambda_3=18\end{cases}\rightarrow \lambda_2=3,\ \lambda_3=6$$

تعریف: ماتریس $A_{n\times n}$ را قطری شونده می نامیم هرگاه ماتریس وارون پذیر P موجود باشد که $P^{-1}AP=B$ که B ماتریس قطری است

نکته ۱: مقادیر ویژه ماتریس A همان مقادیر ویژه B هستند و لذا مقادیر ویژه A روی قطر اصلی B قرار می گیرند (B : فرم قطری نامیده می شود.)

نکته ۲: ثابت می شود بردارهای ویژه مستقل A روی ستون های P قرار می گیرند

نکته ۳: شرط لازم و کافی برای آن که ماتریس A قطری شود آن است که n بردار ویژه مستقل داشته باشد.

نکته*: اگر در ماتریس $A_{n\times n}$ مقادیر ویژه λ_1 و ... و λ_n و متمایز باشند آنگاه بردارهای ویژه $\vec{v}_1$ و ... و $\vec{v}_n$ مستقل خطی می‌شوند و لذا A قطری می‌شود و

$$P=[\vec{v}_1 \text{ و } \vec{v}_2 \text{ و ... و } \vec{v}_n]_{n\times n}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n\end{pmatrix}=B$$

۱۰ / ۳۲ ج ۳۸

اگر $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ و $C^{-1}AC$ قطری باشد، ماتریس C را بیابید

ستون‌های C بردارهای ویژه هستند پس ابتدا مقادیر ویژه A را می‌یابیم

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -1\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+10=0 \rightarrow \lambda=2,5$$

$$\lambda=2 \rightarrow (A-\lambda I)v=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \rightarrow 2x-y=0$$

$$\xrightarrow{x=1 \text{ آزاد}} y=2 \rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\lambda=5 \rightarrow (A-\lambda I)v=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \rightarrow -x-y=0$$

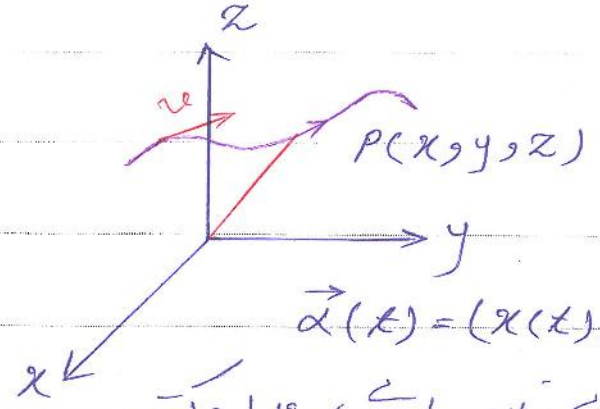
$$\xrightarrow{y=-1 \text{ آزاد}} v_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ فرم قطری $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=C$ یا $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=C$

هم ترتیب را می‌توان تغییر داد و می‌توان در هر ستون عددی را ضرب کرد با شرط تساوی باشند

فصل دوم

خم و رویه



$$\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

خم پارامتری، تابع برداری، معادله حرکت

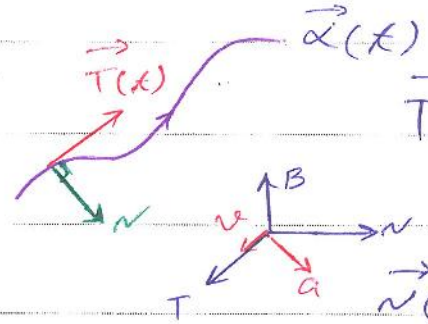
$\vec{OP} = \vec{\alpha}(t)$ بردار مکان شعاع حامل

سرعت $\vec{v}(t) = \alpha'(t) = (x', y', z')$

مماس بر مسیر حرکت

تندی $|v(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$

$$\vec{a}(t) = v'(t) = (x'', y'', z'')$$



$$\vec{T}(t) = \frac{v(t)}{|v(t)|}$$ یکه مماس

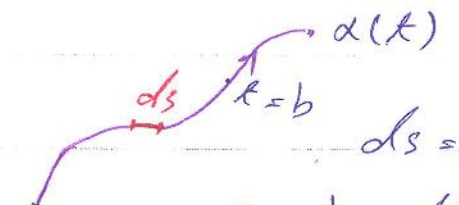
$$\vec{N}(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$ قائم واحد اول (اصلی)

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$ قائم واحد دوم

تعریف: صفحه موازات $\vec{T}$ و $\vec{N}$ را صفحه بوسان می‌نامیم

نکته: ثابت می‌شود که $\vec{B} = \dfrac{v \times a}{|v \times a|}$

طول قوس:



$$ds = |v|\,dt = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

$$\text{طول قوس} = \int_{t=a}^{t=b} ds$$

۱۱/۱۱۸ معادله صفحه عمود بر منحنی $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\sin t \\ z=\cos 2t \end{cases}$ در نقطه متناظر $t=\frac{\pi}{4}$ را بیابید

$\vec{\alpha}(t)=(\sin t, \sin t, \cos 2t)$ $\quad \alpha(\frac{\pi}{4})=(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ نقطه

$\vec{v}=\alpha'=(\cos t, \cos t, -2\sin 2t)$ نرمال صفحه عمود

$v(\frac{\pi}{4})=(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2)$ نرمال

$\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}(y-\frac{\sqrt{2}}{2})-2(z-0)=0$

۱۲/۱۱۸ معادله صفحه بوسان منحنی $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ در نقطه متناظر $t=1$ را بیابید

$\vec{\alpha}(t)=(t, t^2, t^3) \to \alpha(1)=(1,1,1)$ نقطه

$\vec{v}=\alpha'=(1, 2t, 3t^2)=(1,2,3)$ نرمال صفحه بوسان $v\times a$ است

$\vec{a}=v'=(0,2,6)=(0,2,6) \to \vec{v}\times\vec{a}=(6,-6,2)$ نرمال صفحه بوسان

$6(x-1)-6(y-1)+2(z-1)=0$

۳۶/۲۸۸ بردار قائم یکه اصلی یعنی $\vec{N}$ را برای خم زیر $R(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\,\vec{k}$

$R(t)=(\cos t, \sin t, t)$

$\vec{v}=R'=(-\sin t, \cos t, 1)$

$|v|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1^2}=\sqrt{2}$

$\vec{T}=\frac{v}{|v|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1)$

$\vec{T}'=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, -\sin t, 0) \to |T'|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+0}$

$|T'|=\frac{1}{\sqrt{2}} \to \vec{N}=\frac{T'}{|T'|}=(-\cos t, -\sin t, 0) \to \vec{N}=(-\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j})$

۲۹ / ۲ج.۲۸۸ متحرکی در صفحه طوری حرکت می‌کند که در لحظه‌ای که $r=4$ و $\theta=\frac{\pi}{6}$ داریم $\frac{dr}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{2}$ اندازه تصویر بردار سرعت روی محور قطبی را بیابید

تصویر $\vec{v}$ روی محور x $\longleftrightarrow$ مولفه اول $\vec{v}$ یعنی $\frac{dx}{dt}$

$$x=r\cos\theta \longrightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta+r\left(-\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+4\left(-\frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

انحنا یا خمیدگی

تعریف: برای خم $\alpha(t)$ انحنا (خمیدگی) عبارت است از

$$k(t)=\frac{|v\times a|}{|v|^3}$$

و به عکس آن $\rho(t)=\frac{1}{k(t)}$ شعاع انحنا می‌گوییم

حالات خاص

۱) برای خم $\alpha(t)=(x(t),y(t))$ داریم، $k(t)=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$

۲) برای خم $y=f(x)$ داریم $\vec{\alpha}(x)=(x,y)$ $k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

۳) انحنای دایره به شعاع R در هر نقطه $\frac{1}{R}$ است

فرمول شتاب

اگر $\frac{ds}{dt}=|v|$ آنگاه: $\vec{a}=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}+k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N}$

نکته: چنانچه $|v(t)|$ عدد ثابت باشد آنگاه $\vec{N}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

مولفه مماسی شتاب: $a_T=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d}{dt}|v|$

مولفه قائم شتاب: $a_N=k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=k|v|^2$

تاب (پیچش)

تعریف: تاب خم $\alpha(t)$ عبارت است از:

$$\tau(t)=\frac{(v\times a)\cdot a'}{|v\times a|^2}$$

نکته: اگر خم $\alpha(t)$ در یک صفحه واقع باشد آنگاه تاب در همه نقاط آن صفر می‌شود

۱۵/۱۲۱ اگر $w>0$ و b و a مطلوبست انحنا خم زیر؟

$$R(t)=(a\cos wt,\ a\sin wt,\ bwt)$$

$$\vec{v}=R'=w(-a\sin wt,\ a\cos wt,\ b)$$

$$\vec{a}=v'=aw^2(-\cos wt,\ -\sin wt,\ 0)$$

$$\vec{v}\times\vec{a}=aw^3(b\sin wt,\ -b\cos wt,\ a)$$

$$|\vec{v}\times\vec{a}|=aw^3\sqrt{b^2+a^2},\quad |\vec{v}|=w\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\rightarrow k(t)=\frac{|v\times a|}{|v|^3}=\frac{aw^3\sqrt{a^2+b^2}}{(w\sqrt{a^2+b^2})^3}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

مثال: مولفه‌های قائم و مماس شتاب خم زیر را بیابید

$$R(t)=(a\cos wt,\ a\sin wt,\ bwt)$$

مولفه مماس شتاب $=\frac{d}{dt}|v|=\frac{d}{dt}(w\sqrt{a^2+b^2})=0$

مولفه قائم شتاب $=k|v|^2=\frac{a}{a^2+b^2}(w\sqrt{a^2+b^2})^2=aw^2$

۴۳ / ۲ج۱۱۲ $f(t)=(\sin t - t\cos t\ ,\ \cos t + t\sin t)$ انحنا و را در $t=\frac{\pi}{3}$ بیابید

$$\begin{cases} x'=t\sin t \\ y'=t\cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} x''=\sin t + t\cos t \\ y''=\cos t - t\sin t \end{cases}$$

صورت $=|x'y''-x''y'|=|-t^2\sin^2 t - t^2\cos^2 t|=|-t^2|=t^2$

مخرج $=(x'^2+y'^2)^{3/2}=(\underbrace{t^2\sin^2 t+t^2\cos^2 t}_{t^2})^{3/2}=(t^2)^{3/2}=|t|^3$

$\rightarrow k(t)=\frac{t^2}{|t|^3}=\frac{1}{|t|} \rightarrow k(\frac{\pi}{3})=\frac{3}{\pi}$

۱۴ / ۲ج۲۸۶ ماکزیمم مقدار خمیدگی $y=e^x$ در نقطه‌ای با کدام x رخ می‌دهد و چقدر است

(همدان ۹۰)

$y'=e^x$ و $y''=e^x$

$k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \rightarrow k(x)=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$

$\rightarrow \ln k(x)=x-\frac{3}{2}\ln(1+e^{2x}) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{k'}{k}=1-\frac{3e^{2x}}{1+e^{2x}}=\frac{1-2e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$\xrightarrow{\text{ضرب در } k(x)} k'(x)=\frac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{5/2}}=0$

$\rightarrow 2e^{2x}=1 \rightarrow e^{2x}=\frac{1}{2} \rightarrow 2x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2 \quad x=-\frac{1}{2}\ln 2$

حال برای یافتن مقدار ماکزیمم $-\frac{1}{2}\ln 2$ در $k(x)$ جایگذاری می‌کنیم

$\max(k)=k(-\frac{1}{2}\ln 2)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\ln 2}}{(1+e^{-\ln 2})^{3/2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

۳۵ / ۱۳۹ $x=10t^2,\ y=1-3t^3,\ z=4t^3-4$ تاب خم را در $t=1$ بیابید

$\vec{\alpha}=(10t^2,\ 1-3t^3,\ 4t^3-4) \qquad \vec{v}=(20t,\ -9t^2,\ 12t^2)=(20,\ -9,\ 12)$

$\vec{a}=v'=(20,\ -18t,\ 24t)=(20,\ -18,\ 24) \qquad a'=(0,\ -18,\ 24)$

$\rightarrow (v\times a)\cdot a'=0$ با جایگذاری مستقیم $\quad \tau=\frac{(v\times a)\cdot a'}{|v\times a|^2}=0$

مشتق از ضرب بردارها

$\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

۱) $\frac{d}{dt}(\alpha \cdot \beta) = \alpha' \cdot \beta + \alpha \cdot \beta'$

۲) $\frac{d}{dt}(\alpha \times \beta) = \alpha' \times \beta + \alpha \times \beta'$

نکته :

$\vec{\alpha}(t) \cdot \vec{\alpha}(t) = |\alpha(t)|^2$

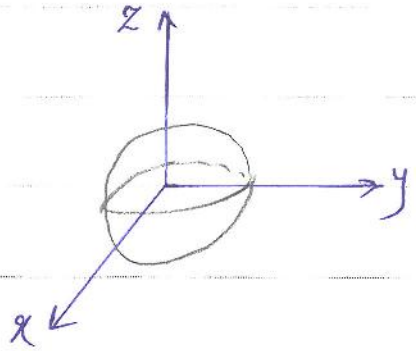
$\frac{d}{dt}|\alpha(t)|^2 = \frac{d}{dt}(\alpha \cdot \alpha) = \alpha' \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha' = 2\alpha \cdot \alpha'$

$\to \frac{d}{dt}|\vec{\alpha}(t)|^2 = 2\vec{\alpha}(t) \cdot \vec{\alpha}'(t)$

نکته : $|\alpha(t)|$ عدد ثابت است $\Leftrightarrow$ $\alpha(t)$ و $\alpha'(t)$ بر هم عمود باشند

نتیجه : چون اندازه بردارهای $\vec{T}(t)$ و $\vec{N}(t)$ و $\vec{B}(t)$ عدد ثابت است و اندازه آنها یک می باشد) پس $N \perp N'$ و $B \perp B'$ و $T \perp T'$

سطح رویه



$x^2+y^2+z^2=1$ در $\mathbb{R}^3$

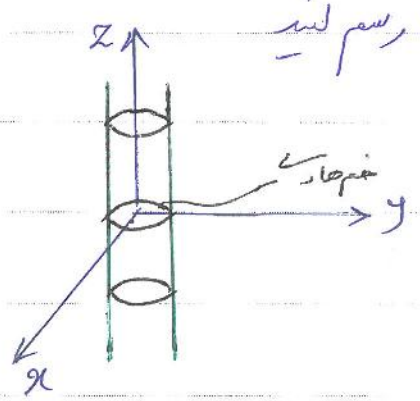
۲ بعدی $\Longleftrightarrow$ دو متغیر آزاد

سطح (رویه) $\Longleftrightarrow$

سطح (رویه) $\Longleftrightarrow$ $f(x,y,z)=0$ در $\mathbb{R}^3$

۱) استوانه

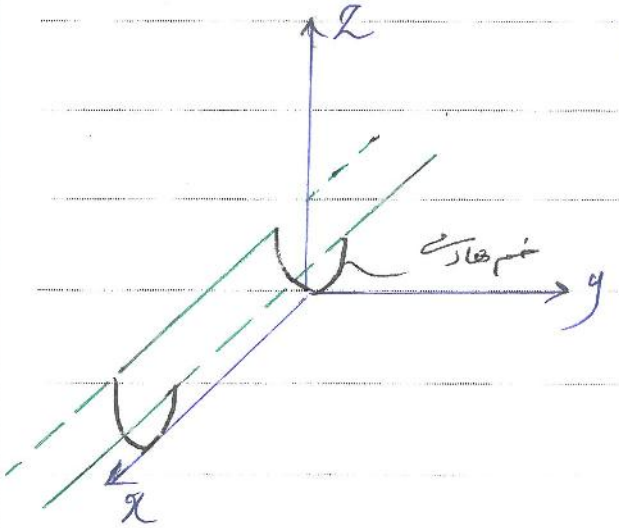
مثال: نمودار معادله $z^2+y^2=1$ را در $\mathbb{R}^3$ رسم کنید



$z=0$ و $z=k$

استوانه در راستای محور zها

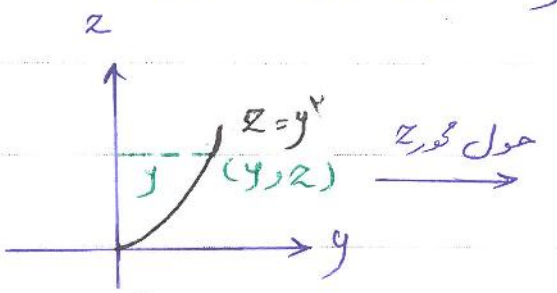
مثال: نمودار $z=y^2$ را در $\mathbb{R}^3$ رسم کنید

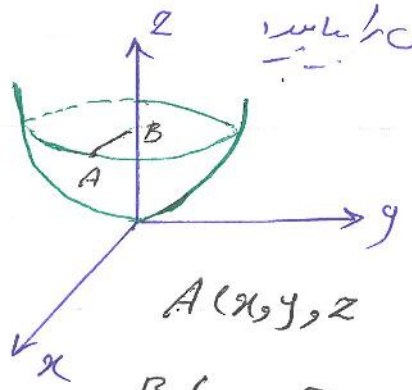


استوانه در راستای محور xها

۲- سطوح حاصل از دوران

مثال: اگر سهمی $z=y^2$ در صفحه zy حول محور z دوران کند، معادله سطح حاصل را بیابید.





$A(x,y,z)$

$B(0,0,z)$

شعاع دوران $= y = \sqrt{z}$

شعاع دوران $= |AB| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow z = x^2+y^2$ معادله سطح

$$z=y^2 \xrightarrow{\text{حول محور } z\text{ها}} z=x^2+y^2$$

$$\begin{cases} z \to z \\ y \to \sqrt{y^2+x^2} \end{cases}$$

مثال: اگر منحنی $z=1+e^{x^2}$ در صفحه xz حول یکی از محورها زیر دوران کند معادله سطح حاصل را بیابید.

الف) حول محور zها، معادله سطح

$$z=1+e^{x^2} \xrightarrow{\begin{cases} z\to z \\ x\to\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}} z=1+e^{x^2+y^2}$$

ب) حول محور xها، معادله سطح

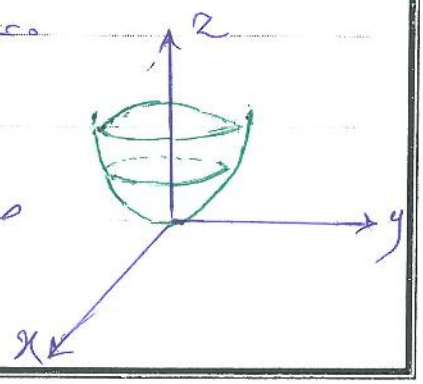
$$z=1+e^{x^2} \xrightarrow{\begin{cases} x\to z \\ z\to\sqrt{z^2+x^2}\end{cases}} \sqrt{z^2+y^2}=1+e^{x^2}$$

۳- سطوح درجه دوم

معادلاتی در $\mathbb{R}^3$ که برحسب x و y و z چند جمله‌ای درجه دوم باشند یعنی

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



صفحه ۱۰۸ و ۱۰۹ کتاب شکلها را حفظ نمایید

فصل سوم
توابع چند متغیره

$f(x) = e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک متغیره

$f(x,y) = x^2+y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ دو متغیره

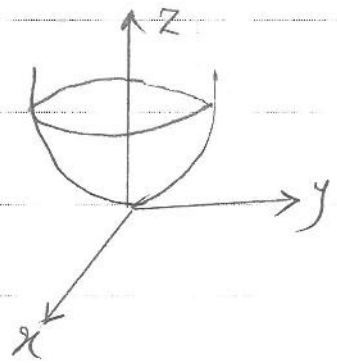
$(x,y) \xrightarrow{f} f(x,y)$

دامنه: $\mathbb{R}^2$ و برد: $[0, +\infty)$

$\underbrace{f \text{ نمودار}}_{\text{سطح (رویه)}} = \{(x,y,z) : z = f(x,y)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

مثال: نمودار تابع $f(x,y) = x^2+y^2$ را رسم کنید

$z = x^2+y^2$



تعریف: اگر $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $c \in \mathbb{R}$ تراز تابع f متناظر با عدد c که آن را با $f^{-1}(c)$ نمایش می‌دهیم، مجموعه نقاطی از D_f است که به ازای آن تابع مساوی c شود.

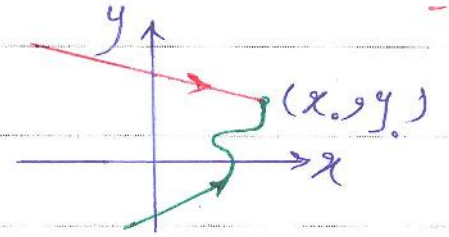
مثال: ترازهای تابع زیر را تعیین کنید $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = c-1$

$f(x,y,z) = c \to x^2+y^2+z^2+1 = c \to x^2+y^2+z^2 = c-1$

کره به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{c-1}$ ← $c-1 > 0$ ، نقطه مبدأ مختصات ← $c-1 = 0$ ، تهی ← $c-1 < 0$

حد و پیوستگی

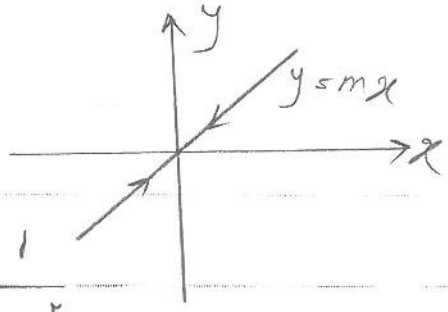
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$



و چنانچه $f(x_0,y_0)=L$ می‌گوئیم f در (x_0,y_0) پیوسته می‌باشد

۱) اگر بر دو مسیر مختلف اعداد متفاوت برای حد بدست آید حد وجود ندارد

مثال: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$



$$y=mx \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{1}{1+m^2}$$

چون جواب به پارامتر m وابسته است ← حد وجود ندارد

۲) حدود مکرر $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=L_1 \\ \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=L_2 \end{cases}$$

چنانچه L_1 و L_2 دو عدد نابرابر باشند آنگاه حد وجود ندارد (اما اگر $L_1=L_2$ هیچ نتیجه‌ای نمی‌دهد)

مثال: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3+x\sin x}{y^2-x^2}$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^2}=0=L_1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim \frac{x\sin x}{-x^2}=-1=L_2$$

چون $L_1\neq L_2$ پس حد وجود ندارد

۳) مختصات قطبی

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \rightarrow x^2+y^2=r^2$$

$(x,y)\rightarrow(0,0) \leftrightarrow r\rightarrow 0$ (θ آزاد است)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{\text{قطبی}}{=} \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = ?$$

چنانچه مستقل از θ حد بالا جواب حاصل می‌گردد ← جواب قابل قبول

شروط استفاده از مختصات قطبی

a: مخرج: $(x^2+y^2)^k$

b: $(x,y)\rightarrow(0,0)$

مثال: $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \overset{\text{قطبی}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta\, r^2\sin^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta = 0$$

مثال: $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \overset{\text{قطبی}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

وجود ندارد

نکته: اگر درجه صورت کمتر یا مساوی درجه مخرج باشد حد وجود ندارد و اگر درجه صورت بیشتر از درجه مخرج باشد جواب حد صفر می‌باشد (لازم به ذکر است که نکته در شرایط مختصات قطبی صدق می‌کند)

مثال: $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{389}y}{(x^2+y^2)^5} = 0$$

درجه صورت $= 390$

درجه مخرج $= 10$

مثال: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(2x^2y)}{x^4+y^2} \overset{\text{هم ارز}}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} \overset{u=x^2}{=} \lim\limits_{(u,y)\to(0,0)} \dfrac{2uy}{u^2+y^2} = 0$ وجود ندارد

مثال: a را طوری بیابید که تابع زیر در (۱و۰) پیوسته باشد

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)y}{x^2+y^2-2x+1} & (x,y)\neq(1,0) \\ a & (x,y)=(1,0) \end{cases}$$

$$a=f(1,0)=\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y}{(x-1)^2+y^2} \overset{u=x-1}{=} \lim_{(u,y)\to(0,0)} \frac{uy}{u^2+y^2} = 0$$ وجود ندارد

هیچ مقداری برای a بدست نمی آید

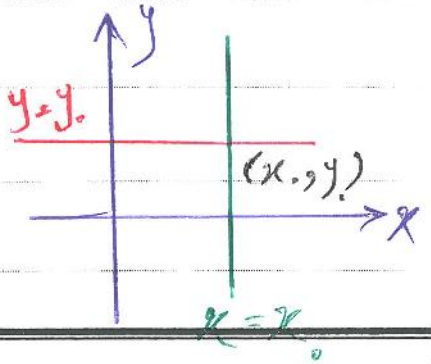
مشتق پاره ای (جزئی و نسبی)

چنانچه در $f(x,y)$ دقیقاً نسبت به یکی از متغیرها مشتق بگیریم به آن مشتق پاره ای می گوئیم. اگر نسبت به x مشتق بگیریم آن را با نماد $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و f'_x و f_x نمایش می دهند.

تعریف: برای محاسبه $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ در ضابطه f قرار می دهیم $y=y_0$ و از تابع حاصل $g(x)=f(x,y_0)$ نسبت به x در $x=x_0$ مشتق می گیریم و لذا $g'(x_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

پس:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$



تذکر: معمولاً برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ ابتدا از ضابطه f نسبت به x مشتق می‌گیریم و سپس $x=x_0$ و $y=y_0$ را جایگذاری می‌کنیم

مثال: $f(x,y)=xe^y+xy^2$ مطلوبست $\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)$

روش اول (تعریف) در ضابطه $x=2$ را جایگذاری می‌کنیم

$$f(2,y)=2e^y+2y^2 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)=2e^y+4y\Big|_{y=0}=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^y+2xy \xrightarrow[y=0]{x=2} \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)=2$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\cos x-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ $\frac{10}{163}$

مطلوبست $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ از تعریف استفاده می‌کنیم

محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$y=0 \rightarrow f(x,0)=\begin{cases}\cos x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}=g(x)$$

چون $g(0)=0$ و $\lim_{x\to 0} g(x)=1$ پس g ناپیوسته و مشتق ناپذیر است و لذا $f_x(0,0)$ وجود ندارد

محاسبه $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ با تعریف

$$x=0 \rightarrow f(0,y)=\begin{cases}-y & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}=h(y)$$

$$\xrightarrow[\text{پیوسته است}]{y=0 \text{ در } h} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=h'(0)=-1$$

۷ / ۲ج ۷۰۹ برای تابع زیر $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ را بیابید

$$f(x,y)=\begin{cases}-1+x+y & x\geq 0\\ -1+x^2+y^2 & x<0\end{cases}$$

از تعریف محاسبه می‌کنیم

$$f_y(0,0) \xrightarrow{x=0} f(0,y)=-1+y=h(y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=h'(0)=1$$

$$f_x(0,0) \xrightarrow{y=0} f(x,0)=\begin{cases}-1+x & x\geq 0\\ -1+x^2 & x<0\end{cases}=g(x)$$

$$\xrightarrow{\text{پیوسته است}} g'_+(0)=1 \text{ و } g'_-(0)=2x\big|_{x=0}=0$$

چون مشتق چپ و راست نابرابر است ← $g'(0)$ وجود ندارد پس $f_x(0,0)$ وجود ندارد

تعریف: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه α می‌نامیم هرگاه:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\alpha} f(x,y)$$

قضیه: اگر $f(x,y)$ همگن از درجه α باشد آنگاه:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha f(x,y)$$

مثال: در تابع $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^5+y^5}$ مطلوبست $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x\,\lambda^2 y^2}{\lambda^5(x^5+y^5)}=\lambda^{-2}\frac{xy^2}{x^5+y^5}=\lambda^{-2}f(x,y)$$

پس f همگن از درجه $\alpha=-2$ می‌باشد

مثال: $f(x,y)=x^2y^3+\frac{x}{x-y}$ مطلوبست

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=5x^2y^3+\frac{2x^3}{x-y}$$

$$xf_x+yf_y=x(g_x+h_x)+y(g_y+h_y)=(xg_x+yg_x)+(xh_x+yh_y)$$

نکته: اگر $u=u(x,y)$ همگن از درجه α باشد و $z=f(u)$ باشد آنگاه

$$xz_x+yz_y=\alpha uf'(u)=\alpha u\frac{dz}{du}$$

۶۹ / ۲ج۶۱

اگر $z=\sin^{-1}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ مطلوبست xz_x+yz_y

همگن $u=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ است $\alpha=2$

۱) $2\sin z$ ۲) $\cos z$ ۳) $2\operatorname{tg} z$ ۴) $\operatorname{cot} z$

$$xz_x+yz_y=\alpha u\frac{dz}{du}=2u\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{2\sin z}{\sqrt{\cos^2 z}}=2\operatorname{tg} z$$

مشتق مراتب بالاتر

اگر از تابع $f(x,y)$ نسبت به هر یک از متغیرها x و y دوبار مشتق بگیریم، ۴ مشتق مرتبه دوم ایجاد می‌شود

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\qquad f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\qquad f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

مثال: $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ مطلوبست $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,2)$

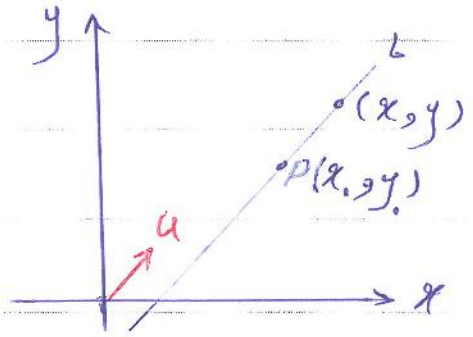
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{-(2y)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{x=1}{y=2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,2)=-\frac{8}{25}$$

نکته: چنانچه در نقطه (x_0,y_0) ضابطه f مشکل نداشته باشد آنگاه مخلوط ها مساویند: $f_{xy}(P)=f_{yx}(P)$

مشتق جهتی (سوئی)

تعریف: اگر $\vec{u}=(u_1,u_2)$ بردار یکه باشد و تابع f و نقطه $P(x_0,y_0)$ مفروض باشند، اگر خط L به موازات $\vec{u}$ و گذرنده از P باشد، به مشتق f در امتداد خط L مشتق جهتی می‌گوئیم و آن را با نماد $\frac{\partial f}{\partial u}(P)$ یا $D_u f(P)$ نمایش می‌دهیم



معادله خط را بدست می‌آوریم

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=t,\ t\in\mathbb{R}$$

$$\rightarrow x=x_0+tu_1,\ y=y_0+tu_2$$

و به ازای $t=0$ نقطه $P(x_0,y_0)$ را خواهیم داشت

ضابطه $f(x,y)$ در امتداد L عبارت است از $g(t)=f(x_0+tu_1,y_0+tu_2)$

و لذا $g'(0)$ برابر مشتق جهتی f در P و در جهت $\vec{u}$ خواهد بود یعنی $D_u f(P)=g'(0)$

پس:

$$D_u f(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tu_1,y_0+tu_2)-f(x_0,y_0)}{t}$$

تذکر: توجه کنید که مشتق جهتی در حالت خاص به مشتق پاره‌ای تبدیل می‌شود

$$u=i \longrightarrow D_u f(p)=\frac{\partial f}{\partial x}(p)$$

$$u=j \longrightarrow D_u f(p)=\frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

مثال: برای تابع $f(x,y)=xy+3x$ مشتق جهتی در $(\overset{x_0}{0},\overset{y_0}{0})$ و در جهت بردار $\vec{a}=i-j$ را بیابید

$$\vec{a}=i-j=(1,-1)\rightarrow |a|=\sqrt{2}$$

$$\vec{u}=\frac{a}{|a|}=\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{u_1},\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}}}_{u_2}\Big)$$

$$D_u f(0,0)=\lim\frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}},-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-f(0,0)}{t}=\lim\frac{-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{\sqrt{2}}t}{t}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$\frac{43}{2ج 91}$ مشتق سوئی تابع زیر در مبدأ و در جهت $\vec{v}=3i+4j$ را بیابید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+2y^3}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\vec{v}=(3,4)\rightarrow |v|=\sqrt{9+16}=5$$

$$\vec{u}=\frac{v}{|v|}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

$$D_u f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{3}{5}t,\frac{4}{5}t\right)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\frac{9}{25}t^3+2\left(\frac{4}{5}\right)^3t^3}{\frac{3}{5}|t|+\frac{4}{5}|t|}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{9}{25}t^3}{\frac{7}{5}t|t|}$$

اگر $t\to 0^+$ و $t\to 0^-$ چون $|t|$ برابر t و $-t$ می‌شود ← حد چپ و راست نابرابرند

← $D_u f(0,0)$ وجود ندارد

تعریف: فرض $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ بردار گرادیان f عبارت است از:

$$\nabla f = \text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

قضیه: اگر مشتقات پاره‌ای مرتبه اول f در نقطه P پیوسته باشند آنگاه:

$$D_u f(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{u}$$

۳۱/۱۷۵ مشتق جهتی $f(x,y) = e^x \operatorname{tg} y + 2x^2 y$ در نقطه $(0, \frac{\pi}{4})$ و در جهت $\vec{a} = i - j$ را بیابید

$$\vec{a} = (1,-1) \text{ و } |a| = \sqrt{2} \longrightarrow \vec{u} = \frac{a}{|a|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (e^x \operatorname{tg} y + 4xy, e^x(1+\operatorname{tg}^2 y) + 2x^2)$$

$$\nabla f(0, \pi/4) = (1, 2) \qquad D_u f = \nabla f \cdot u = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

تذکر: اگر در یک تابع $f(x,y)$ به ازای نقطه $P(x,y)$ و در جهت $\vec{u}$ داشته باشیم:

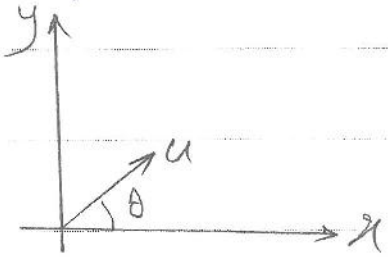
1) $D_u f(P) > 0$

یعنی مقدار f در جهت $\vec{u}$ در نقطه P صعودی است

2) $D_u f(P) < 0$

یعنی مقدار f در جهت $\vec{u}$ و در نقطه P نزولی است

۳۵/۱۷۶ مشتق جهتی $f(x,y)=2x^2-3xy+5y^2$ در نقطه (۲و۱) و در جهت $\vec{u}$ که با محور x ها مثبت زاویه ۴۵° می سازد چقدر است



$$\vec{u}=(\cos\pi/4 \text{ و } \sin\pi/4)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\nabla f=(4x-3y \text{ و } -3x+10y)$$

$$\rightarrow \nabla f(1\text{و}2)=(-2\text{و}17) \qquad D_u f=\nabla f\cdot u=\frac{-2}{\sqrt{2}}+\frac{17}{\sqrt{2}}=\frac{15}{\sqrt{2}}$$

۵۲/۱۱۴ج۲ اگر f در نقطه $(a\text{و}b)$ مشتق پذیر و مشتق در جهت $i+j$ برابر $3\sqrt{2}$ و در جهت $3i-4j$ برابر ۵ باشد گرادیان f در $(a\text{و}b)$ را بیابید

$$\nabla f=(f_x \text{ و } f_y) \qquad \vec{A}=(1\text{و}1)\rightarrow|\vec{A}|=\sqrt{2}\rightarrow \vec{u}=\frac{A}{|A|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\text{و}1)$$

$$\vec{B}=(3\text{و}-4)\rightarrow|\vec{B}|=5\rightarrow \vec{v}=\frac{B}{|B|}=\frac{1}{5}(3\text{و}-4)$$

$$\begin{cases}3\sqrt{2}=D_u f=\nabla f\cdot u=\frac{1}{\sqrt{2}}(f_x+f_y)\\ 5=D_v f=\nabla f\cdot v=\frac{1}{5}(3f_x-4f_y)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f_x+f_y=6\\ 3f_x-4f_y=25\end{cases}$$

$$7f_x=49\rightarrow f_x=7\rightarrow f_y=-1 \qquad \nabla f=(7\text{و}-1$$

نکته: حداکثر مقدار مشتق جهتی f در P برابر $|\nabla f(P)|$ است و در جهت بردار گرادیان یعنی $\frac{\nabla f(P)}{|\nabla(P)|}$ بدست می آید

نکته: حداقل مقدار مشتق جهتی f در P برابر $-|\nabla f(P)|$ است و در خلاف جهت گرادیان $-\frac{\nabla f(P)}{|\nabla(P)|}$ بدست می آید

مثال: برای تابع $f(x,y,z)=xe^y+xz^2$ در نقطه $(1,0,-1)$ حداقل مقدار مشتق جهتی و جهت آن را بیابید

$$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)=(e^y+z^2,\ xe^y,\ 2xz)$$

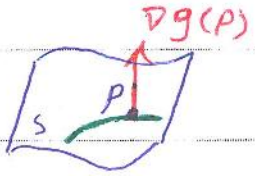
$$\nabla f(1,0,-1)=(2,-1,-2)\rightarrow |\nabla f|=\sqrt{4+1+4}=3$$

جهت حداقل $=-\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ حداقل مشتق جهتی $=-|\nabla f|=-3$

کاربرد هندسی گرادیان

۱) سطح S به معادله $g(x,y,z)=0$ و نقطه P روی آن مفروض است

بردار گرادیان یعنی $\vec{\nabla} g(P)$ بردار عمود بر سطح در P می‌باشد

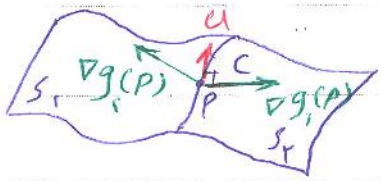


الف) بردار نرمال سطح در P برابر $\vec{\nabla} g(P)$ می‌باشد

ب) بردار هادی خط قائم بر سطح در P برابر $\vec{\nabla} g(P)$ می‌باشد

ج) بردار نرمال صفحه مماس بر سطح در P برابر $\vec{\nabla} g(P)$ می‌باشد

۲) اگر خم C تقاطع (فصل مشترک) دو سطح $g_1(x,y,z)=0$ و $g_2(x,y,z)=0$ باشد و نقطه $P\in C$ داده شود:



$\vec{u}$ را بردار مماس بر C در P می‌گیریم آنگاه

$$\vec{u}=\nabla g_1(P)\times\nabla g_2(P)$$

الف) بردار مماس بر خم C در P برابر $\vec{u}$ است

ب) هادی خط مماس بر خم در P برابر $\vec{u}$ است

ج) نرمال صفحه قائم بر خم در P برابر $\vec{u}$ است

۱۱۲ / ۲ج ۴۷ص معادله صفحه مماس بر سطح زیر در (۲،۰،۱) را بیابید

$z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ $\qquad g = x^2 + y^4 + e^{xy} - z = 0$

$\nabla g = (2x + y e^{xy}, 4y^3 + x e^{xy}, -1)$

$\rightarrow \nabla g(1,0,2) = (2,1,-1)$ نرمال

$\rightarrow 2(x-1) + (y-0) - (z-2) = 0$

۳۲ / ۲ج ۳۸ص معادله خط مماس بر فصل مشترک سطوح زیر در (۱،۱،۱) را بیابید

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ $\qquad xyz = 1$

$g_1 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$ و $g_2 = xyz - 1 = 0$

$\nabla g_1 = (2x, 4y, 6z) = (2,4,6)$

$\nabla g_2 = (yz, xz, xy) = (1,1,1)$

$\rightarrow \vec{u} = \nabla g_1 \times \nabla g_2 = (-2,4,-2)$ هادی

$\rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-2}$ خط مماس

۷ / ۲ج ۱۵ص در چه نقاطی از سطح زیر قائم بر آن با هر سه محور مختصات زوایای مساوی می‌سازند

$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1$

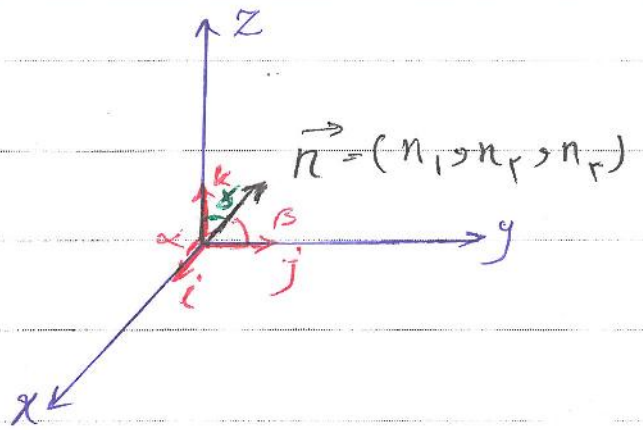
$g = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 - 1 = 0$

چون بردار هادی خط قائم ∇g است پس باید هر سه مولفه ∇g با هم مساوی باشند

$\nabla g = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 2z) \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = 2z$ $\quad \begin{cases} x = 4z \\ y = 4z \end{cases} \xrightarrow{\text{در معادله}}$

$4z^2 + 4z^2 + z^2 - 1 = 0 \rightarrow 9z^2 = 1 \rightarrow z^2 = \frac{1}{9} \rightarrow z = \pm\frac{1}{3}$

$(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ و $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$ نقاط



$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\vec{i}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{n_1}{|\vec{n}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{j}}{|n|\cdot|j|} = \frac{n_2}{|n|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{|n|\cdot|k|} = \frac{n_3}{|n|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\vec{n} = |\vec{n}|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

شرط لازم و کافی برای آنکه $\vec{n}$ با هر سه محور زاویه مساوی بسازد آن است که هر سه مولفه مساوی شود

قاعده مشتق ترکیب توابع (مشتق زنجیره‌ای)

$$z = f(y),\ y = g(x) \qquad z - \underbrace{\boxed{y}}_{\text{واسطه}} - x \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$z = f(\underbrace{g(x)}_{\text{واسطه}}) \rightarrow z' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

مشتق نسبت به x

مشتق نسبت به y

$$z \begin{cases} x \begin{cases} r \\ s \\ t \end{cases} \\ y \begin{cases} r \\ s \\ t \end{cases} \end{cases}$$

z تابعی از r و s و t است

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$z=f(u,v,w)$ u و w و v توابعی از x و y است

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot f'_u+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot f'_v+\frac{\partial w}{\partial x}f'_v$$

مثال: اگر $z=f(x,y)$ و $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ مطلوبست x و y واسطه $\frac{\partial f}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

۲۱/۱۸۳ فرض کنید f تابعی از x و y است معادله $2\frac{\partial f}{\partial x}-3\frac{\partial f}{\partial y}=0$ با تغییر متغیرها $r=2y-3x$ و $s=2y+3x$ به چه معادله‌ای تبدیل می‌شود

هدف این سوال یافتن مشتقات f برحسب متغیرهای جدید r و s است. همواره باید از قاعده مشتق زنجیره‌ای در تغییر متغیرها استفاده کنیم و متغیر جدید (r و s) را واسطه بگیریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=-3f_r+3f_s$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} 2\frac{\partial f}{\partial x}-3\frac{\partial f}{\partial y}=-12f_r=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}=2f_r+2f_s$$

$\to f_r=0 \to \partial f/\partial r=0$

۲۳/۱۸۴ اگر $w=f(u,v)$ دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته باشد با تغییر متغیر $\begin{cases}x=u+v\\ y=u-v\end{cases}$ حاصل $\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$ را بیابید

از قاعده مشتق زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم و متغیرهای جدید x و y را واسطه می‌گیریم

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=w_x-w_y$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u} w_x - \frac{\partial}{\partial u} w_y$$

$$= \left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial w_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$= (w_{xx} + \cancel{w_{xy}}) - (w_{yx} + w_{yy}) = w_{xx} - w_{yy}$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

۵۶/۱۸۶ در تابع مشتق پذیر $z = y\phi(\underbrace{x^2 - y^2}_{t \text{ واسطه}})$ مطلوبست

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y(2x)\phi' \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \phi + y(-2y)\phi'$$

$$\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = 2y\phi' + \frac{1}{y}\phi - 2y\phi' = \frac{1}{y}\phi = \frac{1}{y^2} z$$

مثال: اگر $w = f(y-x, x-y)$ مطلوبست $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -1 \times f_1' + 1 \times f_2' = -f_1' + f_2'$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1 \times f_1' + (-1) \times f_2' = f_1' - f_2'$$

$$\longrightarrow \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

۵۹/۱۸۶ اگر $\vec{r} = (x, y, z)$ و $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و f تابعی مشتق پذیر باشد مطلوبست $\nabla f(x)$

نکته ۱۹ کتاب

$$\nabla f(r) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(r), \frac{\partial}{\partial y} f(r), \frac{\partial}{\partial z} f(r)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r) = \frac{\partial r}{\partial x} f'(r) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} f'(r) = \frac{x}{r} f'(r)$$

$$\nabla f(r) = \left(\frac{x}{r} f'(r), \frac{y}{r} f'(r), \frac{z}{r} f'(r)\right) = \frac{f'(r)}{r}(\underbrace{x, y, z}_{\vec{r}}) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

دیفرانسیل

تعریف: برای $f(x,y)$ دیفرانسیل کامل (کل) عبارت است از:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

و تقریب خطی عبارت است از: $P(x_0, y_0)$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \simeq f(P) + \underbrace{f_x(P)\Delta x + f_y(P)\Delta y}_{df(P)}$$

۱/۲۸۱ مقدار تقریبی $f(x,y)=\sqrt{2x^2+e^{2y}}$ در نقطه $(2.2, -0.2)$ را بیابید

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta x = 2.2 - 2 = 0.2 \\ \Delta y = -0.2 - 0 = -0.2 \end{cases}$$

$$f(2,0) = 3 \qquad f_x(2,0) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}}\Big|_{(2,0)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$f_y(2,0) = \frac{2e^{2y}}{2\sqrt{2x^2+e^{2y}}}\Big|_{(2,0)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$f(2.2, -0.2) \simeq f(2,0) + f_x(2,0)\Delta x + f_y(2,0)\Delta y$$

$$= 3 + \frac{4}{3}(0.2) + \frac{1}{3}(-0.2) = 3.2$$

تعریف: فرض کنید $f(x,y)$ دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته باشد، دیفرانسیل دوم f عبارت است از:

$$d^2f = f_{xx}\underbrace{dx^2}_{(dx)^2} + 2\underbrace{f_{xy}}_{\text{ماتریس هسیان}} dx\,dy + f_{yy}\underbrace{dy^2}_{(dy)^2}$$

و داریم:

$$d^2f = [dx \quad dy]_{1\times 2}\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

نکته: اگر مشتقات مرتبه دوم f پیوسته باشند و A ماتریس متقارن باشد به طوریکه:

$$A = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

آنگاه: $d^2f = [dx \quad dy]\,A\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$

۲۳ / ۲ج ۴۶۳

در تابع $z=\frac{x-2y}{xy}$ دیفرانسیل دوم z را در نقطه (۲و۱) به صورت $[dx \quad dy]\, A \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$ نوشتیم که A متقارن است. دترمینان A را بیابید

$$A=\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} \qquad z_x=2x^{-2},\ z_y=-y^{-2}$$

$$\to z_{xx}=-4x^{-3}=-4 \ ,\quad z_{xy}=0 \qquad z_{yy}=2y^{-3}=2(2)^{-3}=2\times\tfrac{1}{8}=\tfrac{1}{4}$$

$$\to A=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A=-1$$

دیفرانسیل مرتبه دوم z در (۲و۱):

$$d^2z=z_{xx}\,dx^2+2z_{xy}\,dx\,dy+z_{yy}\,dy^2=-4dx^2+\tfrac{1}{4}dy^2$$

مشتق ضمنی

$$F(x,y)=0 \xrightarrow[x:\text{مستقل}]{y:\text{تابع}} \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$F(x,y,z)=0$$

z تابع

x و y : مستقل

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

مشتق رابطه نسبت به تابع

مثال: از رابطه $xe^{w}+y^{2}z=x^{3}+w$ مطلوبست $\frac{\partial x}{\partial w}=?$ ضمنی

$$F=xe^{w}+y^{2}z-x^{3}-w=0$$

x : تابع

$$\frac{\partial x}{\partial w}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial w}}{\frac{\partial F}{\partial x}}=-\frac{xe^{w}-1}{e^{w}-3x^{2}}$$

۲۲ / ۱۷ج۲ f و g مشتق پذیرند و $g(z-x)+f(y-z)=0$ مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ ضمنی

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}+\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{z}}\right)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{(-g'+0)+(0+f')}{g'+(-f')}$$

$$=\frac{g'-f'}{g'-f'}=1$$

فرمولی برحسب مستقل و تابع پاره ای مستقیم

جهتی

فرمول با واسطه برحسب مستقل و تابع زنجیره ای

فرمول بین تابع و مستقل بصورت مخلوط باشد ضمنی

۳۰ / ۲ج ۶۷۸ اگر رابطه $xyz^2 = x^2+y^2$ متغیر z را به عنوان تابعی از x و y نزدیک $(1,1,\sqrt{2})$ در نظر بگیرید مطلوبست $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1,\sqrt{2})$

$$F = x^2+y^2-xyz^2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{2y-xz^2}{-2xyz} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = x^{-1}z^{-1} - \frac{1}{2y}z$$

با فرض آنکه z تابع باشد از رابطه $\frac{\partial}{\partial x}$ می‌گیریم

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -x^{-2}z^{-1} + x^{-1}\left(-z^{-2}\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x-yz^2}{-2xyz}\Bigg|_{(1,1,\sqrt{2})} = 0$$

$$\xrightarrow[z=\sqrt{2}]{x=1,\ y=1} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1,\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تعریف: برای توابع $G(x,y)$ و $F(x,y)$ ژاکوبین عبارت است از:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$

۲۲ / ۲ج ۱۹۹ اگر $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = xy \end{cases}$ و $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ مطلوبست : $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}$

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r^2\cos 2\theta \\ v = xy = (r\cos\theta)(r\sin\theta) = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} u_r & u_\theta \\ v_r & v_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2r\cos 2\theta & -2r^2\sin 2\theta \\ r\sin 2\theta & r^2\cos 2\theta \end{vmatrix}$$

$$= 2r^3\cos^2 2\theta + 2r^3\sin^2 2\theta = 2r^3$$

تعمیم مشتق ضمنی

فرض کنید از دستگاه $\begin{cases} F(x,y,z,w) = 0 \\ G(x,y,z,w) = 0 \end{cases}$ متغیرهای z و x تابع برحسب مشتق های w و y باشند آنگاه :

$$\frac{\partial x}{\partial w} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(w,z)}}{\boxed{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}}$$

ژاکوبین رابطه ها نسبت به تابع

نکته : در یک دستگاه ضمنی شرط آنکه برخی متغیرها تابع برحسب سایر متغیرها باشند آن است که ژاکوبین رابطه ها نسبت توابع مخالف صفر باشد.

۱۱ / ۲ج ۲۱۰ در دستگاه $\begin{cases} 2x = v^2 - u^2 \\ y = uv \end{cases}$ اگر u و v تابع x و y مستقل باشند $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ مطلوبست

روش اول : با فرض آنکه u و v تابع باشند از دستگاه $\dfrac{\partial}{\partial x}$ می گیریم

$$\begin{cases} 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} - 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2 \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

دستگاه ۲ معادله دو مجهول

دستگاه را با روش کرامر حل می کنیم

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}2v & 2\\ u & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2v & -2u\\ u & v\end{vmatrix}}=\frac{-2u}{2(v^2+u^2)}=-\frac{u}{u^2+v^2}$$

روش دوم

$F=v^2-u^2-2x=0$ و $G=uv-y=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,u)}}=-\frac{\begin{vmatrix}2v & -2\\ u & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2v & -2u\\ u & v\end{vmatrix}}=-\frac{2u}{2(v^2+u^2)}=-\frac{u}{u^2+v^2}$$

$\frac{۷۴}{۱۹۵}$ نزدیک کدام نقطه تحت چه شرطی تبدیل $\begin{cases}x=r^2+2s\\ y=s^2-2r\end{cases}$ را می‌توان برای r و s به عنوان تابعی از x و y حل نمود؟

۱) $rs=-1$ ✓۲) $rs\neq-1$

۳) $s+r=0$ ۴) $s^3+r^3\neq0$

$F=r^2+2s-x=0$ و $G=s^2-2r-y=0$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(r,s)}=\begin{vmatrix}2r & 2\\ -2 & 2s\end{vmatrix}=4(rs+1)\neq0$$

$\rightarrow rs+1\neq0\rightarrow rs\neq-1$

نکته: در دستگاه $\begin{cases}F(x,y,z,w)=0\\ G(x,y,z,w)=0\end{cases}$ داریم:

تعداد رابطه‌ها

$$\frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)}=(-1)^2\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,w)}}$$

۷۱/۱۹۴ اگر $\begin{cases} u=x+y+z \\ uv=y+z \\ uvw=z \end{cases}$ مطلوبست $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$

روش اول : x و y و z را برحسب u و v و w محاسبه می‌کنیم

$x=u-uv$ و $y=uv-uvw$ و $z=uvw$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v-vw & u-uw & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix}=u^2v$$

روش دوم:

$F=u-x-y-z=0$

$G=uv-y-z=0$

$H=uvw-z=0$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=(-1)^3\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 \\ vw & uw & uv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}=-\frac{u^2v}{-1}=u^2v$$

اکسترمم نسبی

کاندیدای اکسترمم نسبی $\begin{cases} \text{گرادیان صفر شود} \longleftrightarrow \text{نقطه بحرانی} \\ \text{گرادیان موجود نباشد} \longleftrightarrow \text{نقطه ایزوله} \end{cases}$

تعریف اگر $f(x,y)$ دارای مشتقات مرتبه ۲ پیوسته باشد ماتریس هسیان عبارت است از

$H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$ مبین $\Delta=\det H=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$

آزمون مشتق دوم: اگر P نقطه بحرانی $f(x,y)$ و مشتقات مرتبه دوم f در P پیوسته باشد:

الف) $\Delta(P)>0$ و $f_{xx}(P)>0 \xrightarrow{\text{تعریف بالا}}$ P نقطه مینیمم نسبی

ب) $\Delta(P)>0$ و $f_{xx}(P)<0 \xrightarrow{\text{تعریف بالا}}$ P نقطه ماکزیمم نسبی

ج) $\Delta(P)<0$ آنگاه P نه max و نه min و لذا نقطه P زینی می‌باشد

۱۲۴/۲۵. نقطه $(1,1)$ برای $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ چه نوع نقطه‌ای است

$\nabla f=(f_x,f_y)=(3x^2-3y,\ 3y^2-3x)$

$\nabla f(1,1)=(0,0) \longrightarrow$ $(1,1)$ بحرانی است

$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(6x)(6y)-(-3)^2$ $\quad$ ① $\Delta(1,1)=36-9>0$

② $f_{xx}(1,1)=6>0$ $\quad$ ① و ② $\longrightarrow$ $(1,1)$ مینیمم نسبی

۲۵/۵۴. نقاط بحرانی $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$ و نوع آنها

$\nabla f=(4y-4x^3,\ 4x-4y^3)=(0,0) \rightarrow \begin{cases}4y-4x^3=0\\4x-4y^3=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=x^3\\x=y^3\end{cases}$

$\rightarrow y=x^3=y^9$ — $y=0\rightarrow x=0$

$y\neq 0 \rightarrow y^8=1 \rightarrow y=\pm 1$

$(0,0)$ و $(1,1)$ و $(-1,-1)$

$\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(-12x^2)(-12y^2)-(4)^2$

$(0,0)\rightarrow \Delta(0,0)=-16<0 \longrightarrow$ $(0,0)$ زینی

$(1,1)\rightarrow \begin{cases}\Delta(1,1)>0\\f_{xx}(1,1)=-12<0\end{cases} \rightarrow$ $(1,1)$ ماکزیمم نسبی

$(-1,-1)\rightarrow \begin{cases}\Delta(-1,-1)>0\\f_{xx}(-1,1)=-12<0\end{cases} \rightarrow$ $(-1,-1)$ ماکزیمم نسبی

اکسترمم مطلق مقید (روش ضرایب لاگرانژ)

هدف یافتن اکسترمم (مطلق) تابع پیوسته $f(x,y,z)$ تحت قید (شرط) $g(x,y,z)=0$ می‌باشد.

قضیه: اگر اکسترمم مطلق تابع پیوسته f تحت قید $g=0$ در نقطه A رخ دهد نقطه در دستگاه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g=0 \end{cases}$$

ضریب لاگرانژ

۵ / ۲ج.۳۷

ماکزیمم مقدار $f(x,y,z)=x-2y+2z$ بر کره $x^2+y^2+z^2=1$ را بیابید.

$g=x^2+y^2+z^2-1=0$

روش اول:

$\nabla f=(1,-2,2)$ و $\nabla g=(2x,2y,2z)$

$$\nabla f=\lambda\nabla g \begin{cases} 1=2\lambda x & \to x=\frac{1}{2\lambda} \\ -2=2\lambda y & \to y=\frac{-2}{2\lambda} \text{ و } z=\frac{2}{2\lambda} \\ 2=2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در قید}} \frac{1+4+4}{4\lambda^2}=1 \to 4\lambda^2=9 \to \lambda=\pm\frac{3}{2}$$

کاندیدا اکسترمم $f\left(\frac{1}{2\lambda},\frac{-2}{2\lambda},\frac{2}{2\lambda}\right)=\frac{1+4+4}{2\lambda}=\begin{cases} 3 & ;\ \lambda=\frac{3}{2} \\ -3 & ;\ \lambda=-\frac{3}{2} \end{cases}$

$\longrightarrow \max(f)=3$ و $\min(f)=-3$

روش دوم:

$\vec{u}=(x,y,z)$ و $\vec{v}=(1,-2,2)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=x-2y+2z=f$

$|u\cdot v|\le|u||v| \to |f|\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\sqrt{1+4+4} \to -3\le f\le 3$

min

max

نکته :

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = |u||v||\cos\theta| \leq |u||v|$

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ کوشی ـ شوارتز

تساوی برخ می‌دهد $\leftrightarrow$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$

۸۹ / ۲۰۹ کوتاه‌ترین و بلندترین فاصله مبدأ از خم $x^2+xy+y^2=16$

فاصله (x,y) از مبدأ برابر $\sqrt{x^2+y^2}$ است بهتر است مربع فاصله از مبدأ یعنی $f(x,y)=x^2+y^2$ تحت قید $g=x^2+xy+y^2-16=0$ را بدست آوریم

$\nabla f=(2x,2y)$ و $\nabla g=(2x+y, x+2y)$

$$\nabla f=\lambda\nabla g \quad \begin{cases} 2x=\lambda(2x+y) \xrightarrow{\text{تقسیم کنید}} \frac{x}{y}=\frac{2x+y}{x+2y} \to x^2=y^2 \\ 2y=\lambda(x+2y) \\ x^2+xy+y^2=16 \quad \to y=\pm y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x \xrightarrow{\text{در قید}} 3x^2=16 \longrightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}=y \\ y=-x \xrightarrow{\text{در قید}} x^2=16 \longrightarrow x=\pm 4=-y \end{cases}$$

$f\left(\frac{4}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}}\right)=\frac{32}{3}$ و $f\left(-\frac{4}{\sqrt{3}},-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)=\frac{32}{3}$

$f(4,-4)=32$ و $f(-4,4)=32$

$\longrightarrow \max(\text{فاصله})=\sqrt{32}$ و $\min(\text{فاصله})=\sqrt{\frac{32}{3}}$

۱۳ / ۲ج ۶۷۶ در صفحه xy کمترین فاصله مبدأ از منحنی $x^2y=54$ را بیابید

فاصله (x,y) از مبدأ $=\sqrt{x^2+y^2}$

کافی است مربع فاصله از مبدأ یعنی $f(x,y)=x^2+y^2$ را تحت قید $x^2y=54$ اکسترمم کنید

روش اول (ضرایب لاگرانژ)

$g = x^2 y - 54 = 0$

$\nabla f = (2x, 2y) \to \nabla g = (2xy, x^2)$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \begin{cases} 2x = 2\lambda y & (1) \\ 2y = \lambda x^2 & (2) \\ x^2 y = 54 & (3) \end{cases}$$

در معادله (۱) دو حالت داریم:

$\xrightarrow{\text{حالت اول}} x = 0 \xrightarrow{(3)} 0 = 54 \to$ جواب ندارد

$\xrightarrow{\text{حالت دوم}} x \neq 0 \xrightarrow{(1)} \lambda = 1/y \xrightarrow{(2)} 2y = \frac{x^2}{y} \to x^2 = 2y^2$

$\xrightarrow{(3)} 54 = x^2 y = (2y^2) y = 2y^3 \to y = 3 \to x^2 = 2y^2 = 18$

$\to \min(f) = x^2 + y^2 = 18 + 9 = 27 \to$ کمترین فاصله $= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

روش دوم: از قید داریم $x^2 = \frac{54}{y}$ پس:

$f(x,y) = x^2 + y^2 = \frac{54}{y} + y^2 = \frac{54}{y} + y^2 = h(y)$

$\to h'(y) = -\frac{54}{y^2} + 2y = 0 \to 2y^3 = 54$

$\to y = 3 \to h(3) = 18 + 9 = 27 \to$ کمترین فاصله $= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

روش سوم

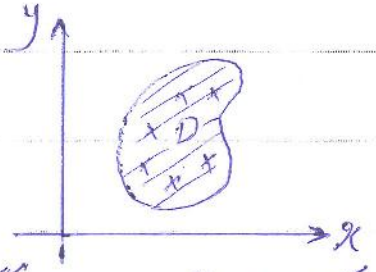
$54 = x^2 y = x^2 (y^2)^{1/2}$

$\xrightarrow{\min} \frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{1/2} \to x^2 = 2y^2$

مانند محاسبات روش اول ← کمترین فاصله: $3\sqrt{3}$

اکسترمم مطلق (روی ناحیه)

تابع پیوسته $f(x,y)$ روی ناحیه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ مفروض است که ناحیه D محدود و بسته (یعنی شامل مرز خود است) باشد آنگاه f الزاماً روی D اکسترمم مطلق دارد.



روش محاسبه: با مقایسه مقادیر f در نقاط زیر:

۱- نقطه بحرانی رایزوله داخل D

۲- نقاط مرزی ناحیه D (باید اکسترمم f را روی مرز بیابیم که معمولاً با ضرایب لاگرانژ انجام می‌شود)

۹۴/۲۱۳ مقادیر اکسترمم مطلق $f(x,y)=3x^2+2y^2-4y+1$ روی $x^2+y^2\leq 16$ را بدست آورید.

۱) بحرانی، ایزوله

$\nabla f=(6x,\ 4y-4)=(0,0) \longrightarrow x=0,\ y=1$

$\longrightarrow (0,1)$ بحرانی $\quad f(0,1)=-1$

۲) مرز ناحیه $x^2+y^2=16$ است که باید اکسترمم f را روی آن بیابیم با روش‌های زیر:

روش اول (ضرایب لاگرانژ)

$g=x^2+y^2-16=0$

$$\nabla g=(2x,2y),\quad \nabla f=\lambda\nabla g \quad \begin{cases} 6x=2\lambda x & (1)\\ 4y-4=2\lambda y & (2)\\ x^2+y^2=16 & (3)\end{cases}$$

حالت اول $x=0 \xrightarrow{(3)} y=\pm 4 \qquad f(0,4)=17,\ f(0,-4)=49$

حالت دوم $x\neq 0 \xrightarrow{(1)} \lambda=3 \xrightarrow{(2)} 4y-4=6y \longrightarrow y=-2 \xrightarrow{(3)}$

$x^2=16-y^2=12 \longrightarrow x=\pm\sqrt{12} \longrightarrow f(\pm\sqrt{12},-2)=53$

روی مرز $\longrightarrow \max = 53$ و $\min = 17$

روش دوم: از معادله مرز داریم $0 \leq x^2 = 16 - y^2 \rightarrow 16 - y^2 \geq 0$

$\rightarrow y^2 \leq 16 \rightarrow -4 \leq y \leq 4$

روی مرز $f = 3(16 - y^2) + 2y^2 - 4y + 1 = -y^2 - 4y + 49$

حال باید اکسترمم $h(y) = -y^2 - 4y + 49$ را برای $-4 \leq y \leq 4$ بیابیم

$h'(y) = -2y - 4 = 0 \rightarrow y = -2$

y	-2	4	-4
$h(y)$	53	17	49

روی مرز $\rightarrow \max = 53$ و $\min(f) = 17$

با مقایسه مقادیر داریم: $\max(f) = 53$ و $\min(f) = -1$

مثال: مقادیر اکسترمم مطلق $f(x,y) = -x + 4y + 1$ روی ناحیه مثلثی شکل به اضلاع زیر را بیابید $y = x$ و $y + x = 2$ و $y = 0$

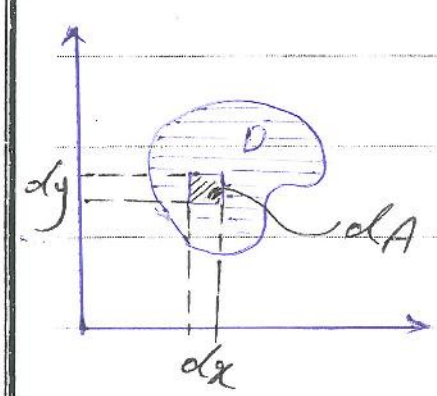
رأس	$(1,1)$	$(0,0)$	$(2,0)$
f	4	1	-1

$\rightarrow \max(f) = 4 \quad \min(f) = -1$

نکته: اگر $f(x,y) = ax + by + c$ و ناحیه چندضلعی باشد (یعنی همه اضلاع ناحیه خط باشند) آنگاه اکسترمم مطلق در روس ناحیه رخ می‌دهد (کاندیدای اکسترمم مطلق)

فصل چهارم

انتگرال توابع چند متغیره

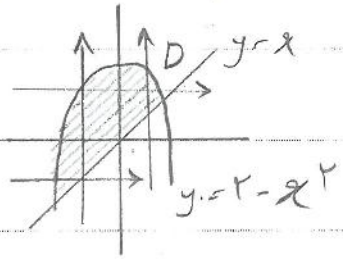


$D \subseteq \mathbb{R}^2$ یک ناحیه باشد و (x,y) پیوسته باشد

المان سطح انتگرال $dA = dy\,dx = dx\,dy$

دوگانه f روی D $\iint_D f(x,y)\,dA$

۱ / ۲۸۷ D ناحیه محدود بین $y=x$ و $y=2-x^2$ است مطلوبست $\iint_D x\,dA$



روش اول $x = 2 - x^2 \to x = -2$ و 1

روش اول $\iint_D x\,dy\,dx = \int_{-2}^{1}\int_{x}^{2-x^2} x\,dy\,dx$

$= \int_{-2}^{1} xy\Big|_{x}^{2-x^2} dx = \int_{-2}^{1} (x(2-x^2) - x^2)\,dx$

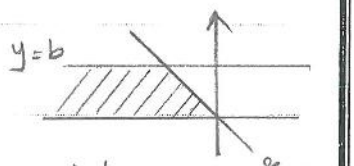
$\to \iint_D x\,dy\,dx = -9/4$

روش دوم: $y = 2 - x^2 \to x = \pm\sqrt{2-y}$

$\iint_D x\,dA = \int_1^2 \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} x\,dx\,dy + \int_{-2}^{1}\int_{-\sqrt{2-y^3}}^{y} x\,dx\,dy = -9/4$

۱۲ / ۲۹۳ اگر D ناحیه $0 < y < b$ و $x+y<0$ مطلوبست $\iint_D e^{x/y}\,dy\,dx$

$x+y=0 \to x=-y$



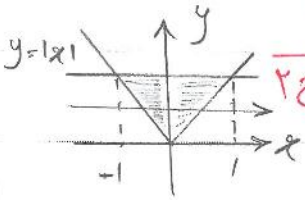
$\iint_D e^{x/y}\,dy\,dx = \int_0^b \left(\int_{-\infty}^{-y} e^{x/y}\,dx\right) dy$

$= \int_0^b y e^{x/y}\Big|_{-\infty}^{-y} dy = \int_0^b (y e^{-1} - \cancel{y e^{-\infty}})\,dy = e^{-1}\int_0^b y\,dy$

$= \frac{1}{2} b^2 e^{-1}$

۱۳۴ / ۲ج ۵۵۴

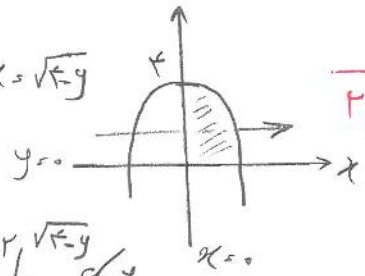
$$\int_{-1}^{1}\int_{|x|}^{1} e^{y^2}\,dy\,dx \qquad \text{ناحیه}\begin{cases} |x|<y<1 \\ -1\le x\le 1\end{cases}$$



$$\text{انتگرال} = \int_0^1\int_{-y}^{y} e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 2y e^{y^2}\,dy = e^{y^2}\Big|_0^1 = e-1$$

۲ / ۲ج ۳۷۷

$$\int_0^2\int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} \qquad \text{ناحیه}\begin{cases} 0\le y\le 4-x^2 \\ 0\le x\le 2\end{cases}$$

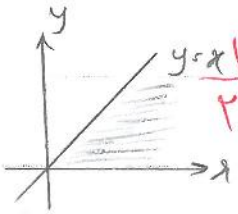


$$\text{انتگرال} = \int_0^4\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{e^{2y}}{4-y}\,x\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y}\,x^2\Big|_0^{\sqrt{4-y}}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 e^{2y}\,dy = \frac{1}{4}e^{2y}\Big|_0^4 = \frac{1}{4}(e^8-1)$$

۱۹ / ۲۹۶

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{x} x e^{-x^2/y}\,dy\,dx = \int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx\,dy$$



$$= \int_0^{+\infty} \frac{y}{2} e^{-x^2/y}\Big|_y^{+\infty}\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} y e^{-y}\,dy$$

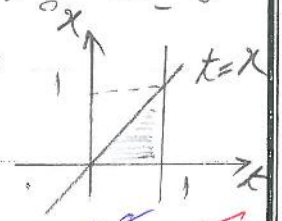
$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} y^1 e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}\Gamma(2) = \frac{1}{2}$$

۱۷ / ۲۹۵

اگر $F(x)=\int_1^x e^{t^2}\,dt$ مطلوبست $I=\int_0^1 F(x)\,dx$

توجه کنید که باید از $F(x)$ برای $0\le x\le 1$ انتگرال بگیریم ولذا در $F(x)$ کران بالا از پائین کوچکتر است پس : $F(x)=-\int_x^1 e^{t^2}\,dt$

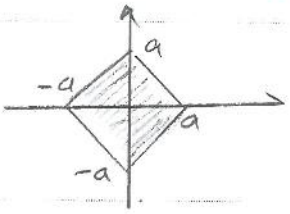
$$I=\int_0^1 F(x)\,dx = -\int_0^1\int_x^1 e^{t^2}\,dt\,dx = -\int_0^1\int_0^t e^{t^2}\,dx\,dt$$



$$= -\int_0^1 t e^{t^2}\,dt = -\frac{1}{2}e^{t^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}(e-1)$$

نکته : اگر تابع پیوسته f نسبت به متغیری فرد باشد و معادله مرز ناحیه نسبت به همان متغیر زوج باشد انتگرال تابع f روی آن ناحیه صفر می‌شود

$\iint_R (x^3\cos^2 y + 3\sin y - \pi)\,dA = ?$ $\quad R: |x|+|y| \le 1$ $\quad \frac{37}{2ج\,9/13}$



انتگرال $= \iint_R \cancel{x^3\cos^2 y}\,dA + \iint_R \cancel{3\sin y}\,dA - \pi\iint_R dA$

نسبت به y فرد است ← تابع نسبت به x فرد است

معادله ناحیه نسبت به y زوج است ← معادله ناحیه نسبت به x زوج است

انتگرال $= -\pi\iint_R dA = -2\pi$

مساحت ناحیه R

$(a\sqrt{2})^2 = 2a^2 = 2$

تغییر متغیر (مختصات) قطبی

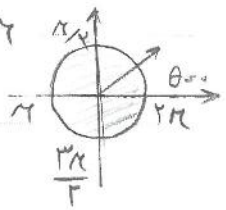
معمولاً وقتی معادله مرز ناحیه دایره یا قسمتهایی از دایره باشد برای محاسبه انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ x^2+y^2 = r^2 \end{cases} \longrightarrow dA = r\,dr\,d\theta$$

$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA \overset{\text{قطبی}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2} r\,dr\,d\theta \quad R: x^2+y^2 \le 1$ $\quad \frac{28}{3,1}$

$= \left(\int_0^1 r e^{-r^2}\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cancel{d\theta}\right) = -\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^1 \times 2\pi$

$= \pi(1-e^{-1})$

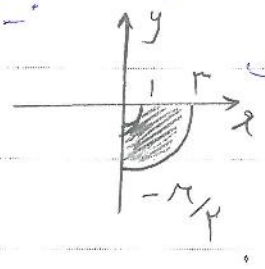


نکته: $\int_a^b\int_c^d f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(y)\,dy\right)\left(\int_c^d f(x)\,dx\right)$

a و b و c و d عدد

$g(x) \times f(x)$

مثال: اگر D ناحیه محدود بین دو دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=9$ در ربع چهارم باشد مطلوبست



$$\iint_D \frac{dA}{x^2+y^2} = \int_{-\pi/2}^{0}\int_1^3 \frac{r}{r^2}\,dr\,d\theta$$

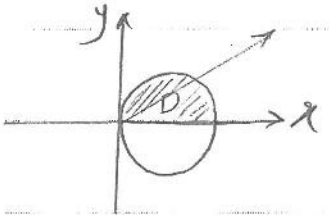
$$= \left(\int_1^3 \frac{dr}{r}\right)\left(\int_{-\pi/2}^{0} d\theta\right) = \frac{\pi}{2}\ln 3$$

۳۱ / ۳.۲ D ناحیه درون دایره $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$ مطلوبست

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 2\iint_{D'} \frac{dA}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} -\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^{a\cos\theta} d\theta$$

$$= -2\int_0^{\pi/2}(a\sin\theta - a)\,d\theta = -2(-a\cos\theta - a\theta)\Big|_0^{\pi/2}$$

چون تابع تحت انتگرال و معادله ناحیه هر دو نسبت به y زوج هستند پس $y>0$ و جواب را در ۲ ضرب می‌کنیم



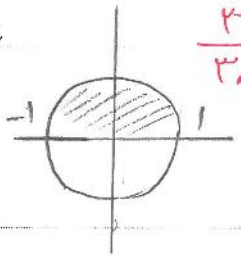
$$\int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} \quad \begin{matrix} u=a^2-r^2 \\ du=-2r\,dr \end{matrix} \quad \int -\frac{1}{2}u^{-1/2}\,du$$

$$= -u^{1/2} = -\sqrt{a^2-r^2}$$

۳۲ / ۳.۲

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx$$

ناحیه $\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$



$$y=\sqrt{1-x^2} \to x^2+y^2=1 \to r=1$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^{\pi}\int_0^1 r^3\,r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 r^4\,dr\right) = \frac{\pi}{5}$$

تغییر متغیر در حالت کلی

$\frac{۳۵}{۳,۶}$ D ناحیه محصور به $x-2y=1$ و $x-2y=2$ و $x+2y=1$ و $x+2y=3$

مطلوبست

$$\iint_D \left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)^3 dx\,dy$$

$$\begin{cases} u = x-2y \\ v = x+2y \end{cases} \quad , \quad D' : \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad |J| = \frac{1}{4}$$

$$\text{انتگرال} = \int_1^3\int_1^2 \left(\frac{u}{v}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\,du\,dv\right) = \left(\frac{1}{4}\int_1^3 \frac{dv}{v^3}\right)\left(\int_1^2 u^3\,du\right) = \cdots$$

نکته:

$$dA = |J|\,du\,dv = |J'|\,dv\,du$$

$$J' = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \longrightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{J}$$

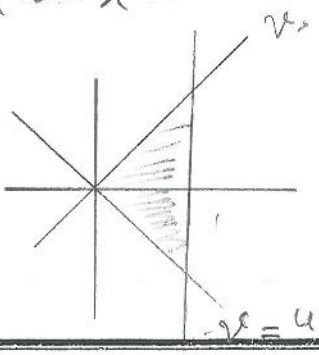
$\frac{۳۶}{۳,۶}$ *** D ناحیه محدود به $x+y=1$ و $x=0$ و $y=0$ مطلوبست

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy \qquad \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

$$x+y=1 \rightarrow u=1$$

$$x=0 \begin{cases} u = y \\ v = -y \end{cases} \rightarrow v = -u \qquad y=0 \rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases} \rightarrow v = u$$

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad |J| = \frac{1}{2}$$



$$\text{انتگرال} = \int_0^1\int_{-u}^{u} e^{v/u}\left(\frac{1}{2}\,dv\,du\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 u\,e^{\frac{v}{u}}\Big|_{-u}^{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u\left(e^1 - e^{-1}\right)du = \frac{1}{4}\left(e - e^{-1}\right)$$

۳۷ / ۳۰۷ R ناحیه محدود به منحنی های $xy=4$ و $xy=2$ ، $y^2=3x$ و $y^2=x$ می باشد

مطلوبست $\iint_R \frac{x^2}{y^4}\,dx\,dy$

$$\begin{cases} u=xy & u=2,\ u=4 \\ v=y^2/x & v=1,\ v=3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -y^2/x^2 & 2y/x \end{vmatrix}=\frac{3y^2}{x}=3v \longrightarrow |J|=\frac{1}{3v}$$

$$\iint_R \frac{x^2}{y^4}\,dA=\iint_R \left(\frac{x}{y^2}\right)^2 dA=\int_1^3\int_2^4 \frac{1}{v^2}\,\frac{1}{3v}\,du\,dv$$

$$=\left(\frac{1}{3}\int_1^3 \frac{dv}{v^3}\right)\left(\int_2^4 du\right)=\cdots$$

نکته: هرگاه ناحیه داخل بیضی باشد قرار می دهیم $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases} \longrightarrow J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr \qquad \begin{matrix} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{matrix}$$

۸۰ / ۲ج۲۹۴ R ناحیه داخل $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$ است مطلوبست

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dA \qquad a=1,\ b=3 \rightarrow \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=3r\sin\theta \end{cases} \rightarrow J=3r$$

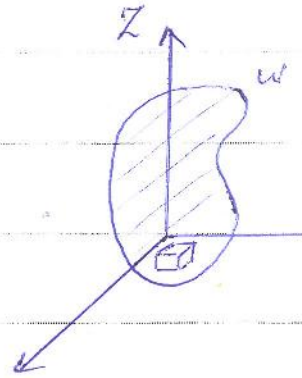
$$r^2(\cos^2\theta+9\sin^2\theta)$$

انتگرال $=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos^2\theta+9r^2\sin^2\theta)\times 3r\,dr\,d\theta$

$$=\left(3\int_0^{2\pi}(1+8\sin^2\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)=\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}(5-4\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{3}{4}\left(5\theta-\cancel{2\sin 2\theta}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{15\pi}{2}$$

انتگرال سه‌گانه



$f(x,y,z)$ پیوسته و $W \subseteq \mathbb{R}^3$ یک ناحیه می‌باشد

۶ حالت $dV = dz\,dy\,dx = dx\,dy\,dz = \cdots$ المان حجم

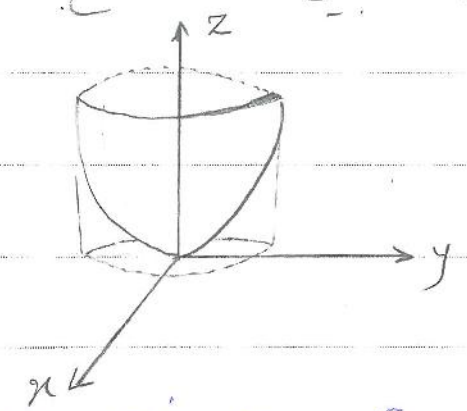
$\iiint_W f(x,y,z)\,dV$ = انتگرال سه‌گانه f روی W

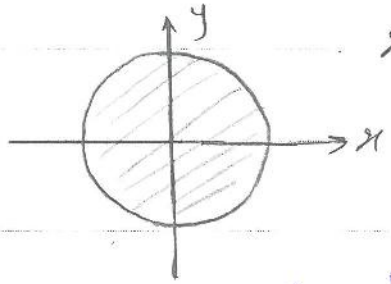
تذکر: چنانچه $f=1$ حاصل انتگرال بالا برابر حجم W است

مثال: W را ناحیه محدود به سطح $z = x^2+y^2$ و صفحه $z=1$ می‌گیریم انتگرالی بنویسید که حجم ناحیه را با المان $dV = dz\,dx\,dy$ توصیف کند.

$$\text{حجم} = \iiint dV = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{1} dz\,dx\,dy$$

همواره برای حدود x و y ناحیه W را بر صفحه xy تصویر کرده و آن را در دوگانه توصیف می‌نماییم برای تصویر کردن کافی است متغیر z را بین معادله سطوح جدا نمائیم تا $x^2+y^2=1$ به عنوان مرز تصویر بدست آید

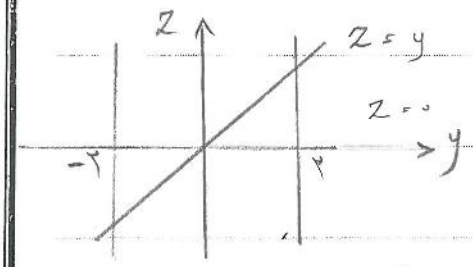




$x^2+y^2=1$

$x = \pm\sqrt{1-y^2}$

۱۱۶ / ۲ج۴۷ حجم ناحیه محدود به $x = 4-y^2$ و $z=y$ و $z=0$ و $x=0$ در ناحیه $z>0$



$4-y^2=0 \longrightarrow y=\pm 2$

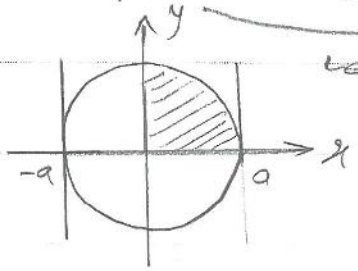
$$\text{حجم} = \iiint dV = \int_0^2\int_0^y\int_0^{4-y^2} dx\,dz\,dy$$

$$= \int_0^2\int_0^y (4-y^2)\,dz\,dy = \int_0^2 y(4-y^2)\,dy = \left(2y^2-\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 4$$

۴۶/۳۱۲ حجم ناحیه محدود به استوانه‌های زیر را بیابید $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$

روش اول: چون تابع و هم معادله مرزها نسبت به x و y و z زوج هستند پس $z\geq 0$ و $y\geq 0$ و $x\geq 0$ و جواب را در ۸ ضرب می‌کنیم

$$\begin{cases} x^2+z^2=a^2 \longrightarrow z=\sqrt{a^2-x^2} \\ x^2+y^2=a^2 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$$



۱/۸ اول فضا

$$y=\sqrt{a^2-x^2} \longrightarrow x^2+y^2=a^2$$

$$\text{حجم}=\iiint_{\text{کل ناحیه}} dV = 8\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dy\,dx = 8\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = \frac{16}{3}a^3$$

روش دوم: حل بدون تقارن

$$\text{حجم}=\iiint dV = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\,dy\,dx = \frac{16}{3}a^3$$

مختصات (تغییر متغیر) استوانه‌ای

هرگاه تصویر بر صفحه xy را در قطبی بنویسیم به مختصات حاصل استوانه‌ای گوییم

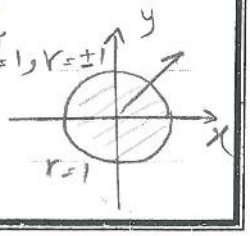
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases} \longrightarrow dV = r\,dz\,dr\,d\theta \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}$$

همواره برای حدود r و θ باید تصویر ناحیه بر صفحه xy را در قطبی می‌نویسیم

مثال: حجم ناحیه محدود به $z=x^2+y^2$ و $z=1$ را بیابید

$$\text{حجم}=\iiint dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 r\,dz\,dr\,d\theta$$

z حذف $\longrightarrow r^2=1$ و $r=\pm 1$



$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^3)\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 (r-r^3)\,dr\right) = \pi/2$$

نکته: حجم ناحیه محدود به سهمی‌گون $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ راس (۰،۰،۰) و صفحه عمود بر محور آن یعنی $z=k$ برابر است با $z=k-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ راس (۰،۰،k)

حجم = $\frac{1}{2}$ × مساحت قاعده × ارتفاع

مساحت شکل حاصل از خلف z تا صفحه راس تا صفحه

$\frac{48}{316}$ حجم ناحیه محدود بالا صفحه xy و سهمی $z=x^2+y^2$ و استوانه $x^2+y^2=a^2$ را بیابید

$$\text{حجم}=\iiint dv=\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^a r^3\,dr\,d\theta$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^a r^3\,dr\right)=\frac{\pi}{2}a^4$$

$\frac{4}{2ج\,109}$ حجم ناحیه محدود به $z=x^2+y^2$ و $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} z=r^2 \\ z=r \end{cases} \longrightarrow r^2=r \longrightarrow r=0,1 \longrightarrow r=1 \quad \text{داخل}$$

$$\text{حجم}=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2-r^3)\,dr\,d\theta$$

$$=\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)}_{2\pi}\underbrace{\left(\int_0^1 (r^2-r^3)\,dr\right)}_{1/12}=\frac{\pi}{6}$$

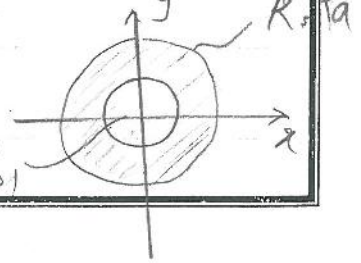
$\frac{4}{2ج\,491}$ R ناحیه محدود داخل کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ و خارج استوانه $x^2+y^2=a^2$ می‌باشد مطلوبست $\iiint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$

چون تابع و هم مرزها نسبت به متغیر z زوج هستند پس $z\geq 0$ و جواب را در ۲ ضرب می‌کنیم

$$\text{انتگرال}=2\iiint_R (x^2+y^2)\,dv=2\int_0^{2\pi}\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\int_0^{2a} r^3\sqrt{4a^2-r^2}\,dr\,d\theta \qquad z=\sqrt{4a^2-r^2}$$

$$=\left(2\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_a^{2a} r^3\sqrt{4a^2-r^2}\,dr\right)$$



$$= 4\pi \int_0^{a^2} 2a^2 (4a^2 - u)\, u^{1/2} \left(-\tfrac{1}{2}\, du\right) = -2\pi \left(\tfrac{8}{3} a^2 u^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{5} u^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{a^2}^{0}$$

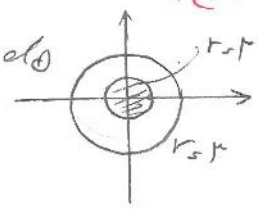
جواب $= \frac{44}{5}\pi\sqrt{2}\, a^5$

$$\begin{cases} u = 4a^2 - r^2 \\ du = -2r\,dr \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = a \rightarrow u = 3a^2 \\ r = 2a \rightarrow u = 0 \end{cases}$$

۱۸ / ۲ج۱۷ حجم ناحیه محدود به $z = 9 - x^2 - y^2$ و صفحه $z = 0$ و داخل $x^2 + y^2 = 4$ را بیابید

$$\text{حجم} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{9-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r(9 - r^2)\,dr\,d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{2} (9r - r^3)\,dr\right) = 28\pi$$



۲۱ / ۲ج۳۷ حجم ناحیه محدود بین $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25}$ و $z = 10$ را بیابید

روش اول : $(0,0,0) \longrightarrow$ ارتفاع $= 10$ راس

$$z \text{ حذف} \longrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 10 \longrightarrow \frac{x^2}{160} + \frac{y^2}{250} = 1$$

$$\text{مساحت قاعده} = \pi ab = \pi(\sqrt{160})(\sqrt{250}) = 200\pi$$

$$\text{حجم} = \tfrac{1}{2} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = 1000\pi$$

روش دوم :

$$\text{حجم} = \iint_D \int_{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25}} dz\,dA = \iint_D \left(10 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}\right) dA$$

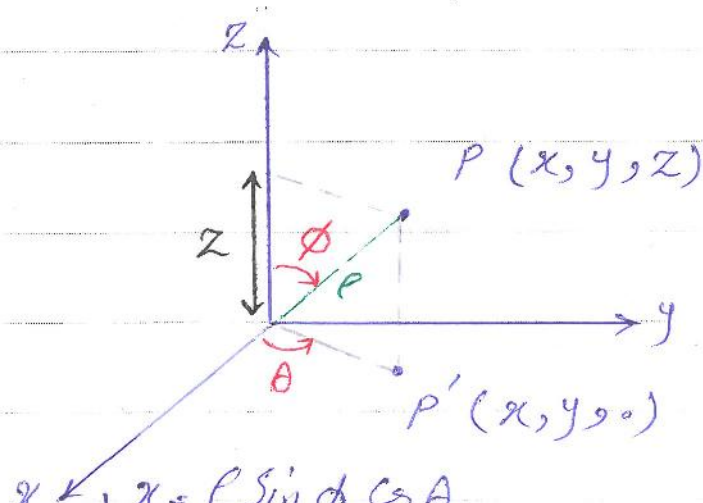
D تصویر ناحیه بر صفحه xy یعنی داخل بیضی $\underbrace{\frac{x^2}{160}}_{a^2} + \underbrace{\frac{y^2}{250}}_{b^2} = 1$ می‌باشد

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta = \overset{4\sqrt{10}}{\sqrt{160}}\, r\cos\theta \\ y = br\sin\theta = \overset{5\sqrt{10}}{\sqrt{250}}\, r\sin\theta \end{cases} \rightarrow J = abr = 200r$$

$$\text{حجم} = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} (10 - 10r^2)(200r\,dr\,d\theta) = \left(2000\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{1} r(1 - r^2)\,dr\right)$$

$$\text{حجم} = 1000\pi$$

مختصات (تغییر متغیر) کروی



$P(x,y,z) \leftrightarrow (\rho,\phi,\theta)$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\rho\sin\phi=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} x=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=\rho\sin\phi\sin\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}$$

$\rho\geq 0$

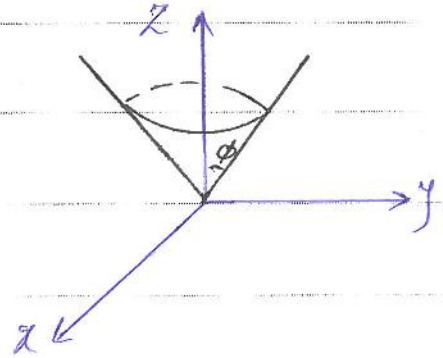
$0\leq\phi\leq\pi$

$0\leq\theta\leq 2\pi$ یا $-\pi\leq\theta\leq\pi$

نکته ۱) $x^2+y^2+z^2=a^2 \leftrightarrow \rho=a>0$ کره به مرکز مبدأ و شعاع a

۲) $\phi=\phi_0 \leftarrow$ مخروط

$\phi_0\neq 0,\pi,\pi/2$



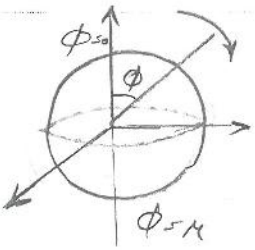
$dv=\underbrace{\rho^2\sin\phi}_{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}}\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

$\frac{۵۸}{۳۴۴}$ داخل کره $x^2+y^2+z^2=1$ مطلوبست

$$\iiint e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{\rho^3}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^1\rho^2e^{\rho^3}d\rho\right)$$

$$=2\pi\times 2\times\frac{1}{3}e^{\rho^3}\Big|_0^1=\frac{4\pi}{3}(e-1)$$



مثال: W را ناحیه محدود بین $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ در فضای $x\le 0$ و $y\ge 0$ و $z\ge 0$ می‌گیریم مطلوبست $\iiint \frac{dv}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$z\ge 0 \to 0\le\phi\le \pi/2$ $\quad$ $x\le 0$ و $y\ge 0 \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \pi/2\le\theta\le\pi$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 \frac{\rho^2\sin\phi}{\rho\sin\phi}\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\left(\int_{\pi/2}^{\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}d\phi\right)\left(\int_1^2\rho\,d\rho\right)$$

$$=\pi/2\times\pi/2\times 3/2=\frac{3\pi^2}{8}$$

مثال: مطلوبست $\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\int_0^{+\infty}\frac{y}{x^2+y^2+z^2}e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

$x\ge 0$ و $y\le 0 \xrightarrow[\text{ربع چهارم}]{} -\pi/2\le\theta\le 0$ $\quad$ $z\le 0\to \pi/2\le\phi\le\pi$

چون ρ در معادله مرزها دیده نمی‌شود پس $\rho\ge 0$

$$\text{انتگرال}=\int_{-\pi/2}^{0}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\rho\sin\phi\sin\theta}{\rho^2}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\underbrace{\left(\int_{-\pi/2}^{0}\sin\theta\,d\theta\right)}_{-1}\underbrace{\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^2\phi\,d\phi\right)}_{1/2(1-\cos 2\phi)}\underbrace{\left(\int_0^{+\infty}\rho e^{-\rho^2}d\rho\right)}_{-1/2\,e^{-\rho}\big|_0^{+\infty}=1/2}$$

$\rho=1$

۲۱ / ۲ج ۴۷۴ $\quad$ D ناحیه بالای مخروط $z=1$ x^2+y^2 و داخل کره $x^2+y^2+z^2=1$ می‌باشد مطلوبست

$$\iiint_D\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$$

$z=\sqrt{x^2+y^2}\to \rho\cos\phi=\rho\sin\phi\to\phi=\pi/4$

$$\text{انتگرال}=\int_0^{2\pi}\int\int_0^1\rho\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/4}\sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^1\rho^3d\rho\right)=2\pi\left(-\cos\phi\big|_0^{\pi/4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\pi/2\left(-\sqrt{2}/2+1\right)$$

تغییر متغیر خاص در سه گانه

۱) برای ناحیه داخل $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ قرار دهید

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\phi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\phi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\phi \end{cases} \rightarrow J = abc\,\rho^2\sin\phi$$

ناحیه داخل بیضی گون به ناحیه داخل کره $\rho=1$ فرستاده می شود و لذا داریم

$$\begin{cases} 0\le\rho\le1 \\ 0\le\phi\le\pi \\ 0\le\theta\le2\pi \end{cases}$$

و ضمناً:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\rho^2 \\ \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}=\rho\sin\phi \end{cases}$$

مثال: اگر S ناحیه داخل بیضی گون $x^2+4y^2+z^2=4$ باشد مطلوب است

$$\iiint \sqrt{x^2+4y^2+z^2}\,dV$$

بیضی گون $\rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{4}=1$ $\quad a=2$ و $b=1$ و $c=2$

$\rightarrow J = abc\,\rho^2\sin\phi = 4\rho^2\sin\phi$

$$\sqrt{x^2+4y^2+z^2}=\sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{4}\right)}=2\rho$$

انتگرال $=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 2\rho\,(4\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta)$

$$=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^{1}8\rho^3\,d\rho\right)=8\pi$$

۲) ممکن است با توجه به معادله مرزهای ناحیه و تابع تحت انتگرال سه متغیره u و v و w را برحسب x و y و z تعیین کنیم و با تغییر متغیر انتگرال را محاسبه نماییم

$$dV = |J|\,du\,dv\,dw$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \longrightarrow \frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$$

$\frac{14}{2ج.676}$ حجم ناحیه محدود به سطح زیر را بیابید

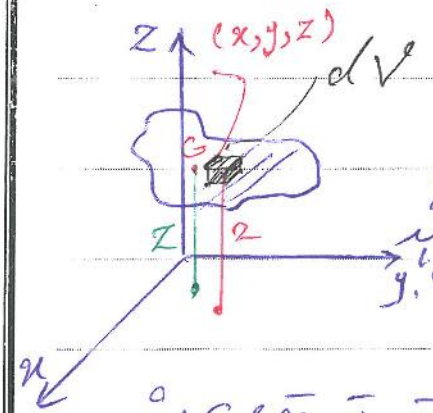
$$\overbrace{(5x+2y+z)^2}^{u}+\overbrace{(y-z+5)^2}^{v}+\overbrace{(5z+3)^2}^{w}=25$$

$$\text{حجم} = \iiint_D dV = \iiint \frac{1}{25}\,du\,dv\,dw = \frac{1}{25}\times\left(\text{حجم ناحیه در مختصات}\right) = \frac{2.\cancel{4}}{3}$$

$$\frac{48}{3}(5)^3$$

سطح $\longrightarrow u^2+v^2+w^2=25 \longrightarrow$ کره

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 25 \longrightarrow |J| = \frac{1}{25}$$



کاربردهای انتگرال

فرض کنید $W \subseteq \mathbb{R}^3$ یک ناحیه باشد به طوری که در هر نقطه (x,y,z) از آن چگالی برابر $\delta = \delta(x,y,z)$ می‌باشد

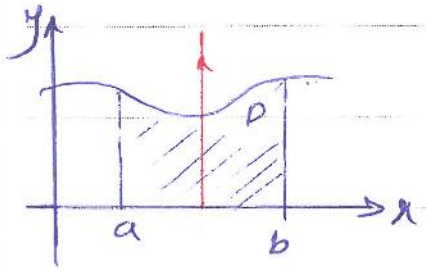
$$\text{جرم}: M = \iiint_W \delta\,dV$$

و چنانچه نقطه تعادل (مرکز جرم، مرکز ثقل) نقطه $G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ باشد

$$M_{xy} = \iiint_W \underbrace{z\,\overset{\text{تابع چگالی}}{\delta}\,dV}_{\text{جرم}}$$ گشتاور نسبت به صفحه xy

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_W z\delta\,dV}{\iiint_W \delta\,dV}$$

و چنانچه در روابط بالا $\delta=1$ فرض شود، حاصل برابر مرکز هندسی ناحیه خواهد بود



تذکر: مرکز هندسی ناحیه $G(\bar{x},\bar{y})$ می باشد

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,dA}{\iint_D dA}=\frac{\int_a^b\int_0^{f(x)} x\,dy\,dx}{\int_a^b\int_0^{f(x)} dy\,dx}=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\,dA}{\iint_D dA}=\frac{\int_a^b\int_0^{f(x)} y\,dy\,dx}{\int_a^b\int_0^{f(x)} dy\,dx}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

۲۸ / ۲ج۲۸۷ فاصله مرکز ثقل جسم همگن محدود به $Z=x^2+y^2$ و $Z=4$ از صفحه xy چقدر است

$Z=r^2$

جسم همگن: جسمی که چگالی آن در همه نقاط عدد ثابت باشد و لذا می توان فرض کرد

$\delta=1 \leftarrow$ مرکز هندسی

$$Z=\frac{\iiint_W z\,dV}{\iiint_W dV}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} z\,r\,dz\,dr\,d\theta}{\underbrace{\text{ارتفاع}}_{}\times\underbrace{\text{مساحت قاعده}}_{\frac{1}{2}}}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(8r-\frac{1}{2}r^3\right)dr\,d\theta}{8\pi}$$

$$Z=\frac{\frac{64\pi}{3}}{8\pi}=\frac{8}{3}$$

چون معادله مرزهای ناحیه نسبت به x زوج هستند پس ناحیه نسبت به صفحه $x=0$ متقارن است و لذا $\bar{x}=0$ با استدلال مشابه $\bar{y}=0$

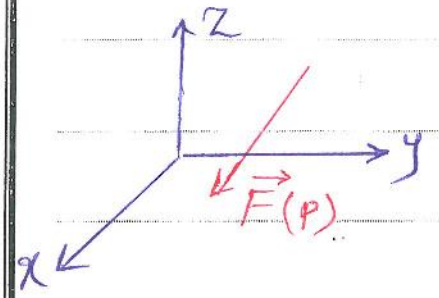
فصل پنجم
انتگرال روی حجم و سطح

میدان برداری

تعریف: هر تابع به شکل $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ را میدان برداری می‌نامیم و به توابع $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ میدان اسکالر (عددی) می‌گوییم

$$f(x,y,z) = xyz \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y,z) = (xyz, -e^x, xy - z^2) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$



نیرو ⟷ میدان برداری

تعریف: $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ میدان برداری $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ میدان اسکالر و عملگر نابلا $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ می‌باشد.

دیورژانس

1) $\operatorname{div}(F) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

کرل (چرخش)

2) $\operatorname{curl}(F) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

3) $\underbrace{\Delta \phi = \nabla^2 \phi = \operatorname{div}(\nabla \phi)}_{\text{لاپلاسین } \phi} = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

و چنانچه $\nabla^2 \phi = 0$ می‌گوییم ϕ تابعی همساز (هارمونیک) می‌باشد

۲۷ / ۲ج ۶۷۸ اگر $\vec{F} = x^2\vec{i} + (2x-y)\vec{j} + yz\vec{k}$ مطلوبست curl F

$$\text{curl}F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 2x-y & yz \end{vmatrix} = (z, 0, 2) = z\vec{i} + 2\vec{k}$$

۳۸ / ۲ج ۱۹ مقادیر α و β را طوری بیابید که تابع زیر همساز باشد

$$u(x,y) = x^3 + \alpha x^2 y + \beta x y^2 + y^3$$

می دانیم شرط همساز بودن آن است که $\nabla^2 u = 0$

$$\nabla u = (u_x, u_y) = (3x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2, \alpha x^2 + 2\beta xy + 3y^2)$$

$$\nabla^2 u = \text{div}(\nabla u) = (6x + 2\alpha y) + (2\beta x + 6y) = (6 + 2\beta)x + (6 + 2\alpha)y = 0 \longrightarrow \begin{cases} 6 + 2\beta = 0 \\ 6 + 2\alpha = 0 \end{cases} \longrightarrow \alpha = -3, \beta = -3$$

نکته: اگر $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ و $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ دارای مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته باشند آنگاه:

1) $\text{curl}(\nabla\phi) = \vec{0}$

2) $\text{div}(\text{curl}F) = 0$

3) $\text{div}(\phi\vec{F}) = \nabla\cdot(\phi\vec{F}) = \nabla\phi\cdot F + \phi(\nabla\cdot F)$

4) $\text{curl}(\phi\vec{F}) = \nabla\times(\phi\vec{F}) = \nabla\phi\times F + \phi(\nabla\times F)$

مثال: فرض کنید $\vec{r} = (x, y, z)$ $r = |\vec{r}|$ و n عدد حقیقی است

1) مطلوبست $\text{div}(r^n\vec{r}) = \nabla\cdot(r^n\vec{r}) = \nabla r^n + r^n(\nabla\cdot\vec{r})$

$$= \nabla r^n\cdot\vec{r} + r^n(\nabla\cdot\vec{r}) = nr^{n-1}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r} + 3r^n = (n+3)r^n$$

$\rightarrow div(r^n \vec{r}) = (n+3) r^n$

۲) $curl(r^n \vec{r}) = \nabla \times (r^n \vec{r}) = \nabla r^n \times \vec{r} + r^n \cancel{(\nabla \times \vec{r})}^{\vec{0}}$

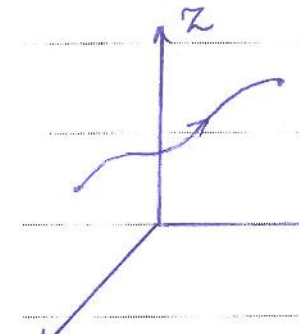
$= n r^{n-1} \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{r} + \vec{0} = \vec{0}$

$\rightarrow curl(r^n \vec{r}) = \vec{0}$ این میدان غیرچرخشی است

$$\nabla \times \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

نکته: $div(r^n \vec{r}) = (n+3) r^n$

انتگرال میدان برداری روی خم (انتگرال کار)



فرض کنید $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ میدان برداری و خم پارامتری به معادله $\begin{cases} \vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \\ a \leq t \leq b \end{cases}$ مفروض است

و جابجایی دیفرانسیلی عبارت است از: $d\vec{r} = \vec{\alpha}'(t)\,dt = (dx, dy, dz)$

$\underbrace{\text{انتگرال (کار) } \vec{F} \text{ روی خم } \alpha}_{\text{چرخش } \vec{F} \text{ روی خم } \alpha} = \int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$

روش محاسبه: $\int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t)\,dt$

در واقع برای محاسبه انتگرال کار باید از معادله خم در ضابطه $\vec{F}$ جایگذاری شود

۱۳ / ۳۸۰ انتگرال میدان $\vec{F}(x,y,z)=(xy,yz,zx)$ روی خم $x=t$ و $y=t^3$ و $z=t^2$ و $0\le t\le 1$ را بیابید

انتگرال کار $=\int_\alpha F.dr$

$\alpha(t)=(t,t^2,t^3) \longrightarrow \vec{F}(\alpha(t))=(t^3,t^5,t^4)$

$\alpha'=(1,2t,3t^2) \longrightarrow F.\alpha'=t^3+5t^6$

انتگرال کار $=\int_\alpha F.dr=\int F.\alpha' dt=\int_0^1 (t^3+5t^2)dt=?$

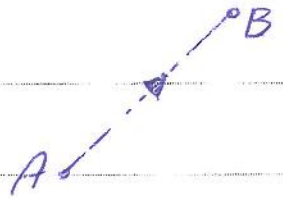
۸۱ / ۲ج۱۸۳ c پاره خط واصل از $(-1,0,0)$ به $(1,2,1)$ است مطلوبست

$\int_c y\,dx+z\,dy-x\,dz$

$\vec{AB}=B-A=(1,1,2) \longrightarrow \alpha(t)=A+t\vec{AB}=(\overset{x}{t},\overset{y}{1+t},\overset{z}{2t-1})$

$\int_c y\,dx+z\,dy-x\,dz=\int_0^1(1+t)dt+(2t-1)dt-2t\,dt$

$=\int_0^1 t\,dt=1/2$



نکته: معادله پارامتری پاره خط واصل از A به نقطه B عبارت است از $\vec{\alpha}(t)=A+t\vec{AB}$ ، $0\le t\le 1$

میدان های کنسرواتیو

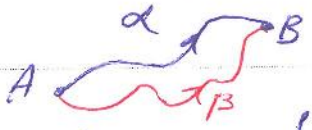
تعریف: میدان برداری $\vec{F}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ را کنسرواتیو (پایستار، اتقاعی) می‌نامیم هرگاه $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ موجود باشد که $\nabla\phi=F$ و تابع ϕ را تابع پتانسیل $\vec{F}$ می‌نامیم

نکته ۱: شرط لازم برای آنکه $\vec{F}$ اتقاعی باشد آن است که

$$\mathrm{Curl}\,F=\vec{0} \xleftrightarrow{F=(F_1,F_2)} \frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}$$

نکته ۲: اگر دامنه $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ برابر $\mathbb{R}^n$ باشد: $\text{curl } F = \vec{0} \Leftrightarrow F$ اتقایی است

قضیه: اگر میدان $\vec{F}$ اتقایی با تابع پتانسیل ϕ باشد آنگاه:



الف: کار $\vec{F}$ مستقل از مسیر است یعنی:

$$\int_A^B F\cdot dr = \int_\alpha F\cdot dr = \int_\beta F\cdot dr = \phi(\overset{\text{انتها}}{B}) - \phi(\overset{\text{ابتدا}}{A})$$

ب: کار $\vec{F}$ روی هر خم بسته صفر است

تذکر: اگر $\vec{F}(x,y) = (F_1, F_2)$ آنگاه:

$$\text{curl } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

مثال: تابع پتانسیل میدان $F(x,y) = (y+2x, x+3y^2)$ را در صورت وجود بیابید

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \xrightarrow[\text{دامنه} = \mathbb{R}^2]{\text{مساوی اند}} \vec{F} \text{ اتقایی است}$$

و لذا تابع $\phi = \phi(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ به عنوان پتانسیل موجود است

طبق محاسبه پتانسیل:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \nabla \phi = F = (F_1, F_2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 = y + 2x & (1) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 = x + 3y^2 & (2) \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا تابع پتانسیل بدست می آید

$$(1) \xrightarrow{\int dx} \phi = \phi(x,y) = xy + x^2 + f(y)$$ عدد ثابت نسبت به x

برای محاسبه $f(y)$ کافی است از ϕ نسبت به y مشتق گرفته و با معادله (۲) مقایسه نماییم

$$x + 3y^2 \overset{(2)}{=} \frac{\partial \phi}{\partial y} = x + 0 + f'(y) \to f'(y) = 3y^2$$

$\rightarrow f(y) = \int 3y^2\,dy = y^3 + \overset{\text{عدد ثابت}}{C}$ و $C \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \phi(x,y) = xy + x^2 + y^3 + C$

نکته: اگر $\vec{F} = (F_1, F_2)$ اتقایی باشد آنگاه تابع پتانسیل عبارت است از:

1) $\phi(x,y) = \int F_1\,dx + \int F_2^*\,dy$

F_2^* = جملاتی از F_2 است که x ندارد (جملاتی از F_2 که مشتق آن نسبت به x صفر شود)

2) $\phi(x,y) = \int F_2\,dy + \int F_1^*\,dx$

F_1^* = جملاتی از F_1 که y ندارد (جملاتی از F_1 که مشتق آن نسبت به y صفر شود)

$\frac{10}{385}$ $\vec{F} = (2xy - z^2, 2yz + x^2, y^2 - 2xz + e^z)$ تابع پتانسیل را بیابید

$\text{curl}\, F = \nabla \times F = \vec{0} \longrightarrow$ F اتقایی است

$\phi(x,y,z) = \int F_1\,dx + \int F_2^*\,dy + \int F_3^*\,dz = x^2y - xz^2 + e^z + C$

$\frac{5}{2\text{ج}\,285}$ کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (x, y, z)$ روی $R(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$\text{curl}\, \vec{F} = \vec{0} \longrightarrow$ F اتقایی است و $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ بیابید

$R(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$: نقطه انتها و $R(0) = (1, 0, 0)$: نقطه ابتدا

$\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$

کار $= \int F \cdot dr = \phi(0, 1, \pi/2) - \phi(1, 0, 0) = (0 + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}) - (\frac{1}{2} + 0 + 0) = \frac{\pi^2}{8}$

۲۹ / ۳۸۹ روی مسیر $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ در ربع اول صفحه مختصات مطلوبست

$$\int F.dr=\int_{(2,0)}^{(0,3)} \underbrace{(-2x+3y)}_{F_1}dx+\underbrace{(3x+2y)}_{F_2}dy$$

$$F=(F_1,F_2)\ ;\ \frac{\partial F_2}{\partial x}=3=\frac{\partial F_1}{\partial y} \longrightarrow$$ F پایستار است

$$\phi(x,y)=\int F_1dx+\int F_2^{*}dy=-x^2+3xy+y^2$$

انتگرال (کار) $=\phi(0,3)-\phi(2,0)=13$

۲۸ / ۲ج۲۰۰ روی خم $2x^2+3y^2=6$ مطلوبست

$$\int \underbrace{(x+2xy)}_{F_1}dx+\underbrace{(x^2-y)}_{F_2}dy=\int F.dr=0$$

$$F=(F_1,F_2)\longrightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x}=2x=\frac{\partial F_1}{\partial y}\longrightarrow$$ F پایستار است

چون F پایستار است و خم یک بیضی و لذا بسته می‌باشد پس انتگرال کار صفر می‌شود

۲۴ / ۲ج۳۵۱ می‌دانیم انتگرال زیر مستقل از مسیر است. مطلوبست $a+b+c$

$$\int (x+2y+az)dx+(bx-3y-z)dy+(4x+cy+2z)dz$$

$Curl\,F=\vec{0} \Longleftrightarrow$ F پایستار است $\Longleftrightarrow$ مستقل از مسیر بودن یا روی هر خم بسته صفر شود

$$Curl\,F=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}=(c+1,-4+a,b-2)=(0,0,0)$$

$c+1=0\longrightarrow c=-1$ $\qquad -4+a=0\longrightarrow a=+4$

$b-2=0\longrightarrow b=2$ $\qquad a+b+c=5$

میدان های برداری خاص

اگر دامنه میدان $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ برابر $\mathbb{R}^n$ نباشد ولی $\text{curl}\, F = \vec{0}$ ممکن است $\vec{F}$ اتقایی یا غیر اتقایی باشد می توان نوشت: $\phi(x,y,z) = \int F_1\, dx + \int F_2^*\, dy + \int F_3^*\, dz$ و داریم $\nabla\phi = F$ حال چنانچه دامنه تابع ϕ برابر دامنه $\vec{F}$ باشد آنگاه $\vec{F}$ اتقایی و ϕ پتانسیل آن است و در غیر این صورت $\vec{F}$ اتقایی نیست

۱) برای میدان $F(x,y) = \left(\overbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}^{F_1} + \overbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}^{F_2}\right)$ دامنه برابر $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ است و داریم $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ یعنی $\text{curl}\, F = \vec{0}$ و داریم: $\phi(x,y) = \int F_1\, dx + \int F_2^*\, dy = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

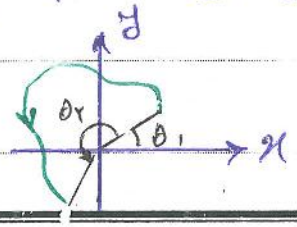
چون $\nabla\phi = F$ و دامنه ϕ برابر $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ یعنی دامنه $\vec{F}$ می باشد پس $\vec{F}$ اتقایی است و ϕ تابع پتانسیل می باشد

نتیجه: میدان $\vec{F} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ اتقایی و تابع پتانسیل آن $\phi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ می باشد

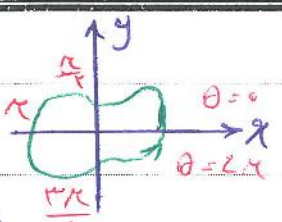
۲) برای میدان $\vec{F}(x,y) = \left(\overbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}^{F_1}, \overbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}^{F_2}\right)$ دامنه برابر $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ و داریم $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ یعنی $\text{curl}\, F = \vec{0}$ و $\phi(x,y) = \int F_2\, dy + \int F_1^*\, dx = tg^{-1}\frac{y}{x} = \theta$

اگر θ را زاویه در مختصات قطبی بگیریم یعنی $tg\theta = \frac{y}{x}$ آنگاه $\nabla\theta = F$ اما چون دامنه θ برابر $\mathbb{R}^2 - \{$محور y ها$\}$ و با دامنه $\vec{F}$ برابر نیست پس $\vec{F}$ اتقایی نمی باشد

نکته: برای میدان $F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ اگر θ زاویه در قطبی باشد یعنی $tg\theta = \frac{y}{x}$ داریم $\nabla\theta = \vec{F}$ اما $\vec{F}$ اتقایی نیست برای محاسبه $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ حاصل برابر اختلاف θ در ابتدا و انتها است به شرط آنکه به ازای هر بار چرخش حول مبدا در جهت مثلثاتی 2π به زاویه اضافه نمائیم پس:

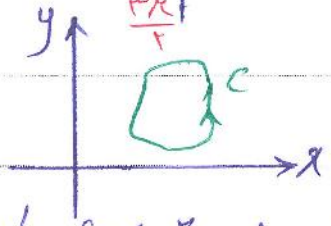


الف) $\int_C F\cdot dr = \theta_2 - \theta_1$



ب) C یکبار در جهت مثلثاتی حول مبدا باشد

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2\pi$$



ج) اگر C بسته و حول مبدا نباشد

$$\int_C F\cdot dr = 0$$

۳۰/۳۹۰ اگر C قوسی از دایره $x^2+y^2=4$ از $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$ به $(-2,0)$ باشد مطلوبست

$$\int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

انتگرال بالا برابر کار میدان $\nabla\theta$ است

ابتدا $A(\sqrt{2},\sqrt{2}) \longrightarrow tg\theta_1 = \frac{y}{x} = 1 \longrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$

انتها $B(-2,0) \longrightarrow tg\theta_2 = y/x = 0 \longrightarrow \theta_2 = \pi$

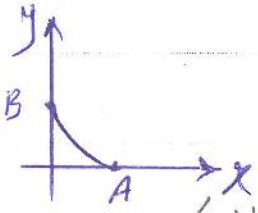
انتگرال کار $= \theta_2 - \theta_1 = \pi - \pi/4 = \frac{3\pi}{4}$

۱۲۰/۲ج۶۲۳ C دایره به مرکز مبدا و به شعاع 2 در جهت مثبت می باشد مطلوبست

$$\int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi$$

چون خم C بسته و حول مبدا است پس انتگرال (کار) 2π می شود

۴/۲ج۶۷۵ C منحنی $\left(\frac{x}{3}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{2}\right)^{2/3} = 1$ از نقطه $A(3,0)$ به $B(0,2)$ می باشد مطلوبست عمران ۹۱



$$\int_C \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

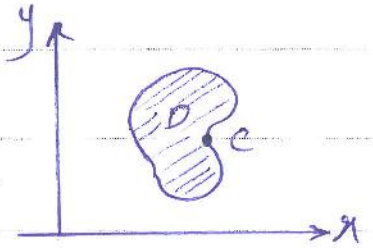
انتگرال کار $= \underbrace{\left(\int_C \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy\right)}_{\text{کار میدان گرادیان } \phi=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)} + \underbrace{\left(\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)}_{\text{کار میدان } \nabla\theta}$

انتگرال اول (کار) $= \phi(0,2) - \phi(3,0) = \frac{1}{2}\ln 2^2 - \frac{1}{2}\ln 3^2$

$= \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3}$

انتگرال دوم (کار) $= \theta_2 - \theta_1 = \frac{6}{2} - 0 = \frac{6}{2}$

جواب انتگرال $= \frac{6}{2} + \ln \frac{2}{3}$



قضیه گرین:

فرض کنید C خمی بسته در صفحه xy باشد که یکبار در جهت مثلثاتی طی می‌شود و میدان $\vec{F}(x,y) = (F_1, F_2)$ دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته در ناحیه D باشد آنگاه:

$$\oint_C F\cdot dr = \oint_C F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$(\mathrm{curl}\,F\cdot\vec{k}) =$ مولفه سوم کرل F

۳۴/۳۹۶ روی بیضی $C: x^2 + 4y^2 = 1$ مطلوبست

$$\int_C \underbrace{y}_{F_1}\,dx + \underbrace{3x}_{F_2}\,dy = \iint_D 2\,dA =$$

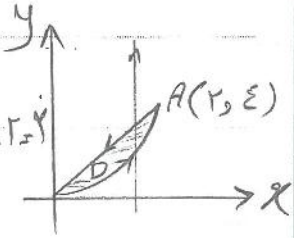
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3 - 1 = 2$$

۳۷/۳۹۶ اگر C قوس از سهمی $y = x^2$ از مبدأ به $A(2,4)$ و پاره‌خط واصل از A به مبدأ باشد مطلوبست:

$$\int_C 2y\,dx + 4x\,dy = \iint_D 2\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 2\,dy\,dx$$

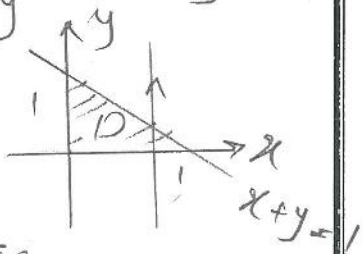
$$= \int_0^2 2(2x - x^2)\,dx = \frac{8}{3}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 4 - 2 = 2$$



۲۰۸ / ۲ج ۴۱ — C پیرامون مثلث محدود به محورهای مختصات و $x+y=1$ می‌باشد مطلوبست

$$\int_C \underbrace{y^2}_{F_1}dx + \underbrace{x^2}_{F_2}dy \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x-2y$$



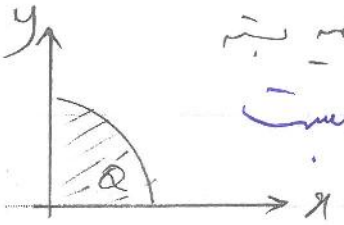
انتگرال کار $= \iint_D (2x-2y)\,dA = \int_0^1\int_0^{1-x}(2x-2y)\,dy\,dx$

$= \int_0^1 (2x(1-x)-(1-x)^2)\,dx = (-x^3+2x^2-x)\Big|_0^1 = 0$

۱ / ۴ج ۹ — C مرز در جهت مثبت ناحیه زیر است

$Q: 0 \le x^2+y^2 \le a^2 \ , \ x \ge 0 \ , \ y \ge 0$

مرز ناحیه بسته مطلوبست

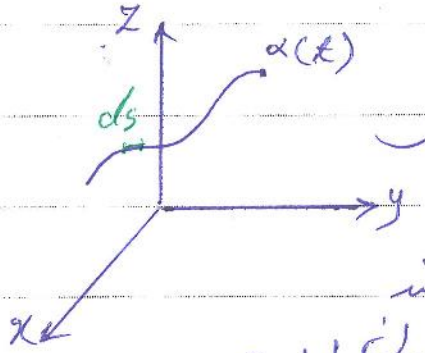


$$\int_C (x-y^3)\,dx + (y^3+x^3)\,dy$$

انتگرال $= \iint_Q 3(x^2+y^2)\,dA \overset{\text{قطبی}}{=} \int_0^{\pi/2}\int_0^a 3r^2\,r\,dr\,d\theta \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx = \frac{\partial F_1}{\partial y}$

$= \left(\int_0^{\pi/2} 3\,d\theta\right)\left(\int_0^a r^3\,dr\right) = \frac{3\pi}{8}a^4 = 3x^2 - (-3y^2) = 3(x^2+y^2)$

انتگرال میدان اسکالر روی خم



$f(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تابع پیوسته و خم پارامتری

$\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$a \le t \le b$ } مفروض هستند

المان طول قوس : $ds = |\vec{\alpha}'(t)|\,dt$

انتگرال (خط) میدان اسکالر f روی خم α $= \int_\alpha f(x,y,z)\,ds$

نحوه محاسبه : $\int_\alpha f\,ds = \int_a^b \underbrace{f(\alpha(t))}_{f \text{ روی خم } \alpha}\,|\alpha'(t)|\,dt$

مثال: اگر $R(t)=(\cos t, t, \sin t)$ و $0\le t\le 1$ مطلوبست

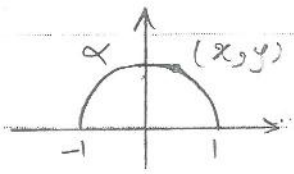
$$\int_R (y+x^2+z^2)\,ds=\int (t+\cos^2 t+\sin^2 t)(\sqrt{2}\,dt)$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1 (t+1)\,dt=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$R'(t)=(-\sin t, 1, \cos t)\to |R'|=\sqrt{\sin^2 t+1+\cos^2 t}=\sqrt{2}$$

$$\to ds=|R'|\,dt=\sqrt{2}\,dt$$

۱۱ / ۲ج ۲۸۶ مرکز جرم سیمی به چگالی $\delta=2(1-y)$ به شکل نیم دایره که در نقاط $(\pm1,0)$ به محور x بسته شده است و در نیم بالایی صفحه قرار دارد را بیابید



$\alpha: x^2+y^2=1 \quad y\ge 0$ مرکز جرم $G(\bar{x},\bar{y})=?$

$$\bar{y}=\frac{\int_\alpha y\,\delta\,ds}{\int_\alpha \delta\,ds}=\frac{2\int_\alpha y(1-y)\,ds}{2\int_\alpha (1-y)\,ds}=\frac{\int_0^\pi \sin t(1-\sin t)\,dt}{\int_0^\pi (1-\sin t)\,dt}$$

$$=\frac{4-\pi}{2(\pi-2)}$$

$$\vec{\alpha}(t)=(\cos t, \sin t),\quad 0\le t\le \pi$$

$$\vec{\alpha}'(t)=(-\sin t, \cos t)\to |\alpha'|=1\to ds=|\alpha'|\,dt=dt$$

چون سیم (خم) و چگالی هر دو نسبت به x زوج هستند پس مرکز جرم روی $x=0$ (محور yها) قرار دارد و $\bar{x}=0$ و لذا $G\left(0, \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}\right)$

نکته: استوانه $\alpha(x,y)=0$ در راستای محور zها مفروض است مساحت (جانبی) قسمتی از این استوانه که بین دو سطح $z=f(x,y)$ و $z=g(x,y)$ قرار دارد، برابر است با:

$$\text{مساحت جانبی}=\int_{\alpha\,\text{خم}} \underbrace{|f-g|}_{\text{ارتفاع}}\,ds$$

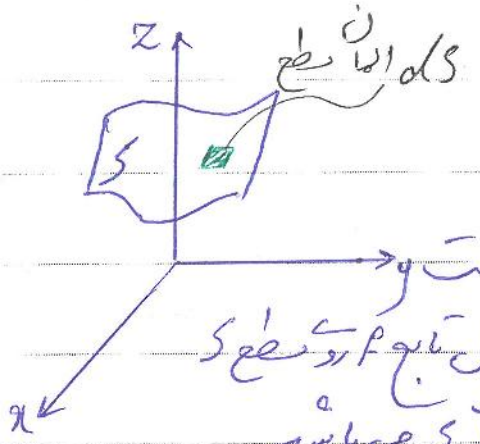
مثال: مساحت قسمتی از استوانه $x^2+y^2=4$ که بین دو سطح $z_1=x+1$ و $z_2=x+y+6$ قرار دارد را بیابید.

$\alpha : x^2+y^2=4 \ , \ z=0$ خم هادی

مساحت استوانه $= \int_\alpha |z_2-z_1|\,ds = \int_\alpha |6+y|\,ds = \int_0^{2\pi} |6+2\sin t|\,(2\,dt) = 20\pi$

$\alpha(t)=(2\cos t, 2\sin t) \ , \ 0\le t\le 2\pi$

$\alpha'(t)=(-2\sin t, 2\cos t) \qquad ds=|\alpha'|\,dt=2\,dt$



انتگرال میدان اسکالر روی سطح

سطح S به معادله $g(x,y,z)=0$ و تابع پیوسته $f(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ مفروض است.

$\iint_S f(x,y,z)\,dS =$ انتگرال تابع f روی سطح S

تذکر: چنانچه f=1 حاصل انتگرال بالا، برابر مساحت S می‌باشد.

روش محاسبه انتگرال روی سطح:

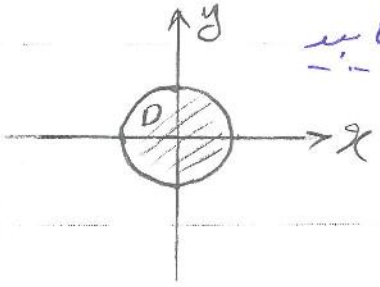
۱) اسباب سطح را بر یکی از سه صفحه مختصات تصویر می‌کنیم و آن را D می‌نامیم (که معمولاً صفحه xy است)

۲) (محاسبه dS) اگر معادله سطح $g=0$ و بردار یکه صفحه تصویر برابر $\vec{P}$ باشد

$$dS=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot \vec{P}|}\,dA$$

۳) dS را در انتگرال جایگذاری کنید و روی D انتگرال دوگانه بگیرید.

مثال: مساحت قسمتی از $z=x^2+y^2$ که زیر صفحه $z=1$ قرار دارد را بیابید



مساحت سطح $= \iint_S ds$

z حذف $\rightarrow x^2+y^2=1$

$g=x^2+y^2-z=0 \rightarrow \nabla g=(2x,2y,-1)$

$\vec{p}=\vec{k} \rightarrow \nabla g\cdot p=\nabla g\cdot k=-1$

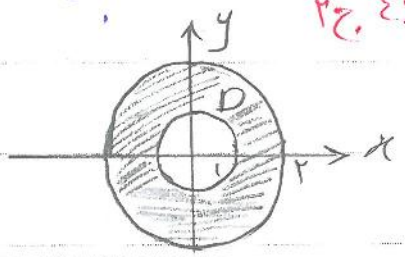
$ds=\dfrac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\vec{p}|}dA=\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dA$

مساحت سطح $=\iint_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dA \overset{\text{قطبی}}{=\!=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta$

مساحت سطح $=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,dr\right)=2\pi\times\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}$!!

$=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$

۳۲ / ۲ج. ۴۶۴ مساحت بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ قرار دارد را بیابید



مساحت سطح $=\iint_S ds$

$g=\sqrt{x^2+y^2}-z=0$

$\nabla g=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$

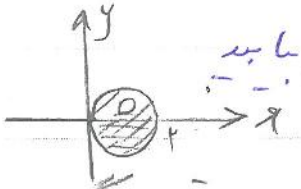
$|\nabla g|=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}+1}=\sqrt{2}$

$p=\vec{k} \rightarrow \nabla g\cdot p=\nabla g\cdot k=-1$

$ds=\dfrac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot p|}dA=\sqrt{2}\,dA$

مساحت سطح $=\iint_S ds=\iint_D\sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}\times\underbrace{D}_{4\pi-\pi}=3\pi\sqrt{2}$

۲۰/۴۸۴ استوانه $x^2+y^2=2x$ نیمه بالایی مخروط $z^2=x^2+y^2$ یک سطح را جدا کند، مقدار انتگرال $f(x,y)=x^4-y^4+y^2z^2-x^2z^2+1$ را روی سطح بیابید



f انتگرال $=\iint_S f\,ds$

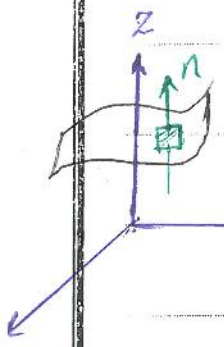
محاسبات تست قبل $\rightarrow ds=\sqrt{2}\,dA$

چنانچه در تابع تحت انتگرال یا ds متغیر z مشاهده شود آن را از معادله سطح اصلی (S) جایگذاری می‌کنیم

$$z^2=x^2+y^2 \rightarrow f=x^4-y^4+\underbrace{z^2}_{y^2-x^2}(y^2-x^2)+1=1$$

$$\text{انتگرال}=\iint_S f\,ds=\iint_D(\sqrt{2}\,dA)=\sqrt{2}\times \underset{\pi}{\underset{\text{مساحت}}{D}}=\sqrt{2}\pi$$

انتگرال میدان برداری روی سطح (انتگرال شار)



فرض کنید $\vec{F}(x,y,z)=(F_1,F_2,F_3)$ میدان $\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ برداری پیوسته و S سطح به معادله $g(x,y,z)=0$ می‌باشد $\vec{n}=\frac{\nabla g}{|\nabla g|}$ بردار یکه عمود بر سطح می‌باشد

$$\text{انتگرال شار } F \text{ روی سطح } S=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\int_S \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

در واقع $d\vec{s}=\vec{n}\,ds$ بردار دیفرانسیل سطح است

چنانچه بردار یکه $\vec{n}$ با جهت مثبت محور xها و y و z به ترتیب زاویه α و β و γ بسازد آنگاه $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ پس:

$$\iint_S F\cdot n\,ds=\int_S(F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma)\,ds$$

و نماد دیگر انتگرال شار $\text{شار } F=\iint_S F_1\,dy\,dz+F_2\,dx\,dz+F_3\,dx\,dy$

نحوه محاسبه $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$

۱) سطح را بر یکی از سه صفحه مختصات تصویر کرده و آن را D می‌نامیم

۲) اگر معادله سطح $g=0$ و $\vec{D}$ قائم تصویر باشد $n\,ds = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|}dA$

۳) $n\,ds$ را در انتگرال جایگذاری و پس از محاسبه $F\cdot n\,ds$ روی تصویر (D) انتگرال می‌گیریم

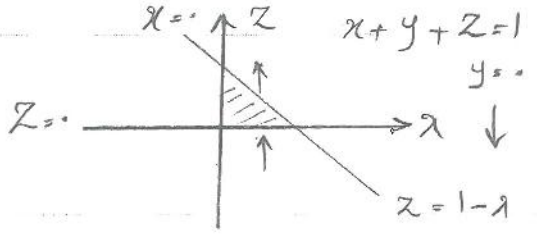
مثال: S را قسمتی از صفحه $x+y+z=1$ می‌گیریم که $x\geq 0$ و $y\geq 0$ و $z\geq 0$ و $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح رو به پایین است مطلوبست

$$\iint_S \overbrace{x}^{F_1}dx\,dz + \overbrace{(y+z)}^{F_2}dx\,dy + \overbrace{y}^{F_3}dy\,dz$$

محاسبه شار با استفاده از تعریف

فرض کنید که تصویر روی چه صفحه‌ای باشد ما فرض می‌کنیم که تصویر روی صفحه xz باشد

$\vec{F}=(y,x,y+z)$



مرز $x=0$ $y=0$ $z=0$

$S: g=x+y+z-1=0$

$\nabla g(1,1,1)$ $\vec{P}=\vec{j} \rightarrow \vec{\nabla g}\cdot\vec{P}=0$

$\rightarrow \vec{n}\cdot ds = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g\cdot\vec{P}|}dA = \pm(1,1,1)dA$

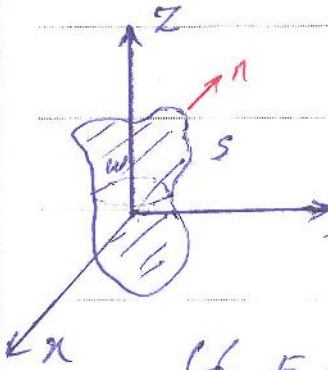
چون n باید رو به پایین باشد پس مولفه سوم منفی است

$n\,ds = -(1,1,1)dA = (-1,-1,-1)dA \rightarrow \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = -(y+x+y+z)dA$

وقتی وارد مرحله سوم می‌شویم نباید نیز مولفه‌های تصویر مولفه دیگر داشته باشیم پس y را از طریق معادله سطح جایگذین می‌کنیم $\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = -(2-x-z)dA$

انتگرال شار $= -\iint_D \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = -\iint_D (2-x-z)dz\,dA = -\int_0^1\int_0^{1-x}(2-x-z)dz\,dx$

$= \int_0^1 (2-x)z - \frac{z^2}{2}\Big]_0^{1-x}dx$ (از نظر ریاضی شار می‌تواند عدد مثبت، منفی و صفر باشد)



قضیه دیورژانس

فرض کنید S سطح بسته باشد و $\vec{n}$ قائم یکه بر سطح رو به سمت بیرون و میدان برداری $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ دارای مشتقات پاره‌ای مرتبه اول و پیوسته در ناحیه W باشد آنگاه

$$\oiint_S F\cdot n\,ds=\iiint_W \operatorname{div} F\,dv$$

$$\operatorname{div} F=\nabla\cdot F=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

۶ / ۲ج ۶۷۵

فرض کنید میدان $\vec{F}(3x+e^{y^2}+z,\ 3y+\sin z^2,\ e^{\cos xy}-4z)$ که F سطح بسته‌ای که استوانه $0\le z\le 3$ ، $x^2+y^2\le 9$ را محدود می‌سازد مطلوبست

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s}=\iint_S \vec{F}\cdot n\,d\vec{s}=\iiint_W \operatorname{div} F\,dv=2\times \underbrace{\pi\times 9}_{\text{مساحت قاعده}}\times \underbrace{3}_{\text{ارتفاع}}=54\pi$$

$$\operatorname{div}\vec{F}=3+3-4=2$$

۱۰۹ / ۲ج ۶۸۸

S مرز ناحیه محدود به مخروط $x=\sqrt{y^2+z^2}$ و صفحه $z=2$ باشد و $\vec{n}$ بردار یکانی به سمت خارج رو $\vec{F}=(3x+\operatorname{tg} yz)\vec{i}+(y+xz)\vec{j}+(2z+e^{xy})\vec{k}$ حاصل $\iint_S \vec{F}\cdot n\,ds$ را بیابید

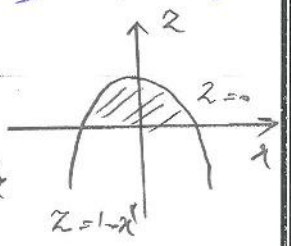
$\operatorname{div}\vec{F}=3+1+2=6$ $\qquad x=\sqrt{y^2+z^2}$ $\qquad$ شعاع دایره $x=2$ و $z=2$ ارتفاع

$$\iint_S \vec{F}\cdot n\,ds=\iiint_W \operatorname{div} F\,dv=(\underbrace{6\times 4\pi}_{\text{مساحت قاعده}}\times \underbrace{2}_{\text{ارتفاع}})\times \tfrac{1}{3}=16\pi$$

حجم مخروط = $\frac{1}{3}$ حجم استوانه $\qquad$ مساحت قاعده $=\pi R^2=4\pi$

۳۰ / ۲ج ۶۱۲ فرض کنید که S رویه محصور کننده ناحیه W باشد که به وسیله $z=0$ و $y=0$ و $y=e$ و $z=1-x^2$ محدود می‌شود و $\vec{n}$ قائم یکه برون سو و میدان $\vec{F}=(x+\cosh y,\ y+\cosh z,\ z+e^{-x^2})$ مطلوبست $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$

$\operatorname{div} F = 1+1+1=3$



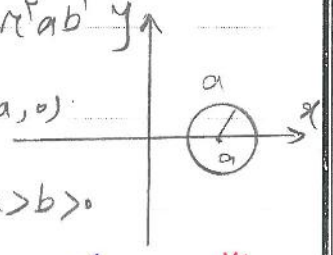
$\iint_S F\cdot n\,ds = \iiint_W \operatorname{div} F\,dv = \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{e} dy\,dz\,dx$

$= 3\int_{-1}^{1}\int e\,dz\,dx = 6\int_0^1 e(1-x^2)\,dx = 4e$

نکته: چنانچه خمی بسته در یک صفحه حول محور در همان صفحه دوران کند نمودار یک سطح بسته ایجاد می‌کند

۳۲ / ۲ج ۶۱۲ انتگرال سطح تابع برداری $\vec{F}(x,\ z^2,\ -2y)$ روی سطح حاصل از دوران دایره $(x-a)^2+y^2=b^2$ که $a>b>0$ حول محور y را بدست آورید

$\iint_S F\cdot n\,ds = \iiint_W \operatorname{div} F\,dv = (\pi b^2)(2\pi a) = 2\pi^2 a b^2$

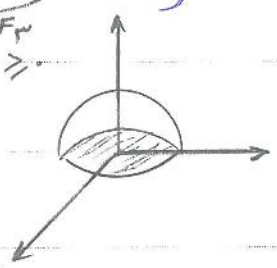


$a>b>0$ $\quad G(a,0) \rightarrow$ مرکز $\quad 2\pi a \times$ مساحت ناحیه = قضیه اول پاپوس

۳۰ / ۲۸۸ S نیمکره $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ همراه با صفحه $z=0$ می‌باشد مطلوبست

$\iint_S \underbrace{xz^2}_{F_1}\,dy\,dz + \underbrace{(x^2y-z)}_{F_2}\,dx\,dz + \underbrace{(xy+y^2z)}_{F_3}\,dx\,dy$

$\vec{F}=(xz^2,\ x^2y-z,\ xy+y^2z)$ $\qquad x^2+y^2+z^2=a^2 \quad z\geq 0$



$\operatorname{div} F = z^2+x^2+y^2$

$\iint_S F\cdot n\,ds = \iiint_W \operatorname{div} F\,dv = \iiint_W (z^2+x^2+y^2)\,dv$

$\xrightarrow{\text{مختصات کروی}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} \rho^2\cdot\rho\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{2\pi}{5}a^5$ نیمکره

نکته : چنانچه سطح S بسته نباشد برای محاسبه $\iint_S F\cdot n\, ds$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم

(اگر را دایره $x^2+y^2=1$ در صفحه $z=0$ می‌گوییم که قائم آن $\vec{n}=-\vec{k}$ می‌باشد)

۱- سطح S را طوری می‌یابیم که S+S' بسته باشد

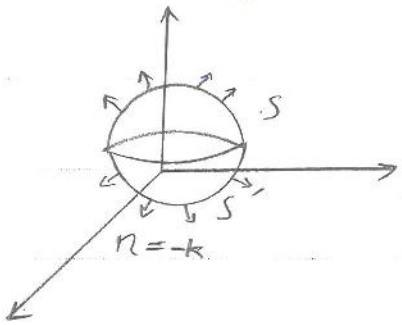
با قضیه دیورژانس شار روی S+S' را محاسبه می‌کنیم

شار روی سطح S' را جداگانه استفاده می‌کنیم و حاصل را از هم کم می‌کنیم

۵ / ۲ج ۶۷۵ شار گذرنده برون سو میدان $\vec{F}=(e^{x^2+y^2}, e^{x^2+z^2}, e^{x^2+y^2})$ از سطح بالایی نیمکره $x^2+y^2+z^2=1$ را بیابید

$ds = \bigcirc\, dA$

این عدد ضریب است وقتی که تصویر با خودش برابر باشد ضریب ۱ می‌شود



$$\text{شار}=\iint_{S\cup S'} F\cdot n\, ds=\iiint_W \operatorname{div} F\, dv=0$$

$$\text{شار روی } S'=\iint_{S'} F\cdot \overset{-k}{n}\, ds=-\iint e^{x^2+y^2}\, dA$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\, dr\, d\theta=2\pi\times\frac{1}{2}e^{r^2}\Big]_0^1=-\pi(e-1)$$

$$\xrightarrow[\text{قطبی}]{\text{با مختصات}} \iint_S F\cdot n\, ds=\iint_{S\cup S'}-\iint_{S'}=0-(-\pi(e-1))=\pi(e-1)$$

۷۴ / ۴۲۳ کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ مطلوبست $\iint_S (x^2+y^2)\, ds$

چون S سطح بسته است اگر میدان مناسب $F(F_1,F_2,F_3)$ طوری بیابیم که $F\cdot n=x^2+y^2$ که n قائم یکه سطح است (برونسو) با استفاده از قضیه دیورژانس مسئله حل می‌شود

$$g=x^2+y^2+z^2-a^2=0 \qquad \nabla g(2x,2y,2z) \qquad |\nabla g|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2a$$

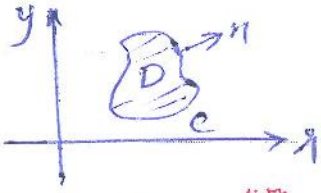
$$\vec{n}=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|}=+\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$$

$$F=(ax,ay,0)=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)=x^2+y^2 \qquad \operatorname{div} F=a+a=2a$$

$$\iint_S (x^2+y^2)\, ds=\iiint_W \underbrace{\operatorname{div} F}_{2a}\, dv=2a\times\frac{4\pi}{3}a^3=\frac{8\pi}{3}a^4$$

تذکر: اگر C یک خم بسته در صفحه و $\vec{n}$ قائم یکه رو به بیرون و $F(F_1, F_2)$ دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته داخل D باشد آنگاه:

$$\text{شار } \vec{F} \text{ روی خم} = \int \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div} F\, dA$$



۲۳ / ۲۸۷ ج۲

شار برون سوی میدان $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + x\vec{j}$ گذرنده از دایره $\underbrace{x = \cos t \quad y = \sin t}_{x^2+y^2=1}$ $\underbrace{0 \le t \le 2\pi}_{\text{دایره با یک دور کامل}}$ را بیابید

$\operatorname{div} F = 1 + 0 = 1$

$$\text{شار } F = \int_C F\cdot n\,ds = \iint_D \operatorname{div} F\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 1\times r\,dr\,d\theta$$

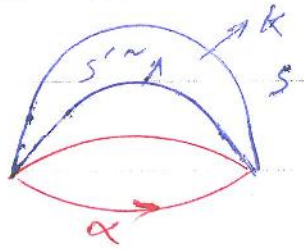
$$= 2\pi \times \frac{r^2}{2}\Big]_0^1 = \pi \rightarrow \text{مساحت}$$

قضیه استوکس

فرض کنید که S یک سطح با قائم یکه رو به بیرون $\vec{n}$ باشد و α مرز آن که خمی بسته و یک بار پیموده شده در جهت مثلثاتی باشد و مشتقات پاره‌ای مرتبه اول میدان $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ روی S پیوسته باشد آنگاه:

$$\underbrace{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{انتگرال کار میدان F روی خم}} = \underbrace{\iint_S \operatorname{curl} F\cdot n\,ds}_{\text{انتگرال شار کرل F روی سطح S}}$$

نتیجه: اگر S و S' دو سطح با مرز مشترک باشند آنگاه



$$\iint_S \operatorname{curl} F\cdot n\,ds = \iint_{S'} \operatorname{curl} F\cdot n\,ds = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

۴۵ / ۲ج ۱۱۳ اگر میدان F مساوی $\vec{F}(z-y, z+x, -x-y)$ و سطح S سهمی گون $z=1-x^2-y^2 \geq 0$ باشد مطلوبست $\iint_S \text{curl}F \cdot n\,ds$

روش اول: با جایگذاری $z=0$ در معادله سهمی گون $x^2+y^2=1$ دو صفحه $z=0$ می باشد

$$\iint_S \text{curl}F \cdot n\,ds = \oint_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F \cdot \alpha'\,dt = 2\pi$$

$$\vec{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t, 0) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$F(\alpha(t)) = (0 - \sin t, 0 + \cos t, -\cos t - \sin t)$$

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \qquad F \cdot \alpha' = \sin^2 t + \cos^2 t + 0 = 1$$

روش دوم: همواره S را داخل هم مرزی می گیریم یعنی S داخل دایره $x^2+y^2=1$ در صفحه $z=0$ می باشد

$$\text{curl}F \cdot \vec{k} = \frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1-(-1) = 2$$

$$\iint_C \text{curl}F \cdot n\,ds = \iint_S \text{curl}F \cdot \underbrace{\overset{k}{n}\,ds}_{dA} = \iint_S 2\,dA = 2\pi$$

۷۶ / ۴۲۸ شار برونسوی $\iint_S \text{curl}F \cdot n\,ds$ از قسمتی از کره $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ در بالای صفحه xy برای میدان زیر $F=(y^2\cos(xz), x^3e^{yz}, e^{-xyz})$

S داخل دایره $x^2+y^2=4$ در صفحه $z=0$ می باشد $\xrightarrow[\text{دکره}]{z=0} x^2+y^2=4$ هم مرزی

$$\text{curl}F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x^2e^{yz} - 2y\cos(xz) = 3x^2 - 2y$$

$$\iint_S \text{curl}F \cdot n\,ds = \iint_S \text{curl}F \cdot \overset{k}{n}\,ds = \iint (3x^2-2y)\,dy\,dx$$

$$= \int 3x^2\,dx - 2\int y\,dy = \int 3r^2\cos^2\theta\, r\,dr\,d\theta$$

تابع نسبت به y فرد است
و S نسبت به y زوج است

$$= 3\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\theta\,d\theta}_{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \times \int_0^2 r^3\,dr = 6\left(\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big]_0^{2\pi} \times \frac{r^4}{4}\Big]_0^2 = 6 \times 2\pi = 12\pi$$

۱۵ / ۲ج ۶۷۶

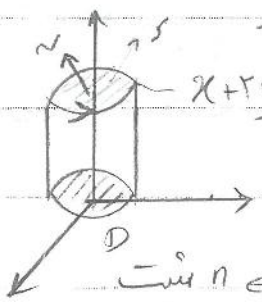
اگر میدان $\vec{F}=(-2y+e^{x^2}, 3x+\cos y^2, e^{z^2})$ و C فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=1$ و $x+2y+z=7$ باشد و جهت آن طوری باشد که تصویر آن بر صفحه xy در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد مطلوبست

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

توجه کنید که خم C بسته است ولذا از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم همواره سطح S را داخل خم می‌گیریم S قسمتی از صفحه $x+2y+z-7=0$ می‌باشد که داخل استوانه $x^2+y^2=1$ قرار دارد پس از قضیه داریم

$$\oint_D F\cdot dr=\iint_S \operatorname{curl}F\cdot n\,ds$$

D تصویر S در صفحه xy یعنی داخل دایره $x^2+y^2=1$ می‌باشد



$\nabla g(1,2,1)$ $\quad \nabla g\cdot \overset{k}{\vec{p}}=1$

$$n\cdot ds=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g\cdot p|}dA=\pm(1,2,1)\,dA$$

با توجه به شکل قائم n رو به بالاست و $n\cdot ds=(1,2,1)\,dA$ مثبت $\Leftarrow n$

لذا باید مولفه سوم مثبت باشد پس علامت مثبت را انتخاب می‌کنیم

$$\operatorname{curl}F=\nabla\times F\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=(0,0,5)$$

$$\operatorname{curl}F\cdot n\,ds=5\,dA$$

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_S \operatorname{curl}F\cdot n\,ds=\iint_D 5\,dA=5\times \text{مساحت}=5\pi$$